Étude des coefficients d'un développement en série entière (extrait de Centrale PC 2019)

Durée : 4 heures

Le sujet est composé de deux parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment la fonction zêta de Riemann.

I Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $\mathrm{I} =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I. A – Dérivées successives

Q 1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

Q 2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathrm{I}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

Q 3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

Q 4. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad 2f'(x) = f(x)^2 + 1$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = \mathrm{P}_n(0)$.

Q 5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$$

I. B – Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

Q 6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x)$$

Q 7. En déduire la minoration $\mathrm{R} \geqslant \pi/2$.

Q 8. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad 2g'(x) = g(x)^2 + 1$$

Q 9. Montrer

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad f(x) = g(x)$$

Indication : considérer les fonctions arctan f et arctan g.

Q 10. En déduire que $\mathrm{R} = \pi/2$.

I. C – *Partie paire et partie impaire du développement en série entière*

Q 11. Justifier que toute fonction $h : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

Q 12. En déduire

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

Q 13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Q 14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

Q 15. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}$$

II Équivalent de α_{2n+1}

II. A – *La fonction zêta*

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Q 16. Montrer que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.

Q 17. Encadrer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales et en déduire $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

Q 18. Déterminer $\mathrm{C}(s)$ tel que

$$\forall s \in]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \mathrm{C}(s)\zeta(s)$$

II. B – *Une formule pour la fonction cosinus*

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $\mathrm{I}_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \,\mathrm{d}t$.

Q 19. Montrer

$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\mathrm{I}_n(x) = \frac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}(x) \qquad \text{et} \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right)\frac{\mathrm{I}_n(x)}{\mathrm{I}_n(0)} = \frac{\mathrm{I}_{n-2}(x)}{\mathrm{I}_{n-2}(0)}$$

Q 20. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(\pi x) = \pi x \frac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

Q 21. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[, \qquad \cos(\pi x) = \frac{\mathrm{I}_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(0)} \frac{\mathrm{I}_{2n}(0)}{\mathrm{I}_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right)$$

II. C – *Un autre développement de tangente*

Dans toute cette sous-partie II.C, on pose $\mathrm{J} = [0, 1/2[$ et, pour tout entier naturel n et tout réel x de J,

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}} \right)$$

Q 22. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in]1, +\infty[, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \frac{1}{2(s-1)} \frac{1}{(2n-1)^{s-1}}$$

Q 23. Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction S_n est définie sur J.

Q 24. Montrer que la suite (S_n) converge simplement sur J vers la fonction nulle.

Q 25. En dérivant $x \mapsto \ln(\cos(\pi x))$, montrer

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{8x}{(2k-1)^2} \frac{1}{1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$$

Q 26. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

Q 27. Montrer l'inégalité $t\cos t \leqslant \sin t$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$.

Q 28. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant -I'_n(x) \leqslant \frac{4x}{n} I_n(x)$$

puis, pour $x \in [0,1]$, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I'_n(x)}{I_n(x)}$.

Q 29. En déduire l'égalité

$$\forall x \in J, \qquad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

II.D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2)$$

Q 31. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini.