Corrigé : étude des coefficients d'un développement en série entière (extrait de Centrale PC 2019)

I Introduction d'une fonction auxiliaire

I. A – Dérivées successives

Q 1. On calcule successivement pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f'(x) = \frac{\sin x + 1}{(\cos x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}$$

Q 2. Raisonnons par récurrence sur n.

- En posant $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X} + 1$ on prouve l'existence de P_n pour $n = 0$.
- Si $n \geqslant 0$, supposons l'existence de P_n acquise. En dérivant une fois de plus on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\cos x)^2 \mathrm{P}_n'(\sin x) + (n+1)\sin x \mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

donc il suffit de poser $\mathrm{P}_{n+1} = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n$ pour obtenir l'existence de P_{n+1}. La récurrence se propage.

La question précédente fournit : $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^3 + 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 1$.

Q 3. Montrons la propriété demandée par récurrence sur $n \geqslant 1$.

- Si $n = 1$ le polynôme $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X} + 1$ répond bien aux exigences.
- Si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang n, et posons donc $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_k \in \mathbb{N}$ et $a_n = 1$.
  La relation de récurrence donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (n+1) a_k \mathrm{X}^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \mathrm{X}^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_{k-1} \mathrm{X}^k + \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) a_{k-1} \mathrm{X}^k \\
&= a_1 + \big(2a_1 + (n+1)a_0\big)\mathrm{X} + \sum_{k=2}^{n-1} \big((k+1)a_{k+1} + (n-k+2)a_{k-1}\big)\mathrm{X}^k + 2a_{n-1}\mathrm{X}^n + a_n \mathrm{X}^{n+1}
\end{aligned}$$

  et il reste à constater que P_{n+1} est bien un polynôme unitaire de degré $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. La récurrence se propage.

Q 4. On calcule $f(x)^2 + 1 = \dfrac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^2} + 1 = 2\dfrac{\sin x + 1}{(\cos x)^2} = 2f'(x)$.

Q 5. Prendre $x = 0$ dans la relation que l'on vient d'obtenir fournit l'égalité : $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$.

Pour $n \geqslant 1$, dérivons cette même relation en utilisant la formule de Leibniz ; on obtient $2f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$.

Pour $x = 0$ on obtient la relation $2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

I. B – Développement en série entière

Q 6. La formule de Taylor avec reste intégral donne $f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n = \int_0^x \frac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} f^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}(\sin t)}{(\cos t)^{\mathrm{N}+2}}\,\mathrm{d}t$.

Lorsque $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ on a pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \geqslant 0$, $\cos t > 0$ et $\sin t \geqslant 0$ donc $\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}(\sin t) \geqslant 0$ *car on a montré à la question 3 que les coefficients de* $\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}$ *sont tous (des entiers) positifs*.

L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \geqslant 0$.

Q 7. La relation obtenue à la question 5 montre que (α_n) est une suite à valeurs positives. La question précédente montre que pour tout $x \in [0, \pi/2[$ la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est majorée. Étant à valeurs positives la série converge, ce qui montre que $x \leqslant \mathrm{R}$.
On a montré l'implication $\big(0 < x < \pi/2 \implies x \leqslant \mathrm{R}\big)$ donc $\mathrm{R} \geqslant \pi/2$.

Q 8. De ceci il résulte que la fonction g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle I, et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n$.
Par ailleurs, on peut réaliser le produit de Cauchy de g par elle-même sur l'intervalle I et obtenir

$$1 + g(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} x^n = 1 + \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} x^n = 2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 2g'(x)$$

d'après la relation obtenue à la question 5.

Q 9. Les fonctions f et g vérifient la même équation différentielle d'ordre 1 sur I ; de plus $f(0) = g(0) = 1$ donc elles sont solution du même problème de Cauchy : elles sont donc égales.

Remarque. En toute rigueur, le théorème de Cauchy n'est au programme que pour une équation différentielle *linéaire*, ce qui n'est pas le cas ici. Pour rester dans les clous du programme il faut constater en dérivant que les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ sont toutes les deux égales (à la constante 1/2) donc qu'elles sont égales à une constante près. Or $\arctan f(0) = \arctan g(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $\arctan f = \arctan g$, puis $f = g$.

Q 10. On a $\lim_{x \to (\pi/2)^-} g(x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = +\infty$ donc même si g est définie en $\pi/2$ elle ne peut en aucun cas y être continue. Une série entière étant continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ il en résulte que $\pi/2 \geqslant \mathrm{R}$, et donc que $\mathrm{R} = \pi/2$.

I. C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Si une telle décomposition existe alors $h(x) = p(x) + i(x)$ et $h(-x) = p(x) - i(x)$ donc nécessairement $p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$.
Réciproquement, les deux fonctions définies ci-dessus sont bien respectivement paire et impaire et vérifient $p + i = h$, d'où l'existence et l'unicité.

Q 12. Les fonctions $p : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ et $i : x \mapsto \tan x$ sont respectivement paire et impaire et vérifient $p + i = f$ donc

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \tan x = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

Q 13. t est développable en série entière donc $\frac{t^{(n)}(0)}{n!}$ est de coefficient d'ordre n de son développement. Ainsi, $t^{(2p)}(0) = 0$ et $t^{(2p+1)}(0) = \alpha_{2p+1}$.

Q 14. On a $t' = 1 + t^2$.

Q 15. Réalisons de nouveau un produit de Cauchy. Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} 1 + t(x)^2 &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{\alpha_{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\alpha_{2(n-p)+1}}{(2(n-p)+1)!} x^{2n+2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+2}{2p+1} \alpha_{2p+1} \alpha_{2n-2p+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} \alpha_{2p+1} \alpha_{2n-2p-1} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} x^{2n} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}$ donc par unicité du développement en série entière on en déduit pour $n \geqslant 1$:

$$\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}$$

II Équivalent de α_{2n+1}

II.A – La fonction zêta

Q 16. Posons $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$. les fonctions f_n sont continue sur $]1,+\infty[$ et pour tout $\alpha > 1$, $\|f_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge donc la convergence de la série $\sum f_n$ est normale et donc uniforme sur $[\alpha,+\infty[$. On en déduit que ζ est continue sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha > 1$, puis sur $]1,+\infty[$ par recouvrement.

Q 17. Pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$. Le calcul de ces intégrales conduit à l'encadrement $\dfrac{1}{s-1}\dfrac{1}{2^{s-1}} \leqslant \zeta(s) - 1 \leqslant \dfrac{1}{s-1}$ et donc $\lim\limits_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

Q 18. On a $\displaystyle\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{1}{2^s}\zeta(s)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \mathrm{C}(s)\zeta(s)$ avec $\mathrm{C}(s) = 1 - \dfrac{1}{2^s}$.

II.B – Une formule pour la fonction cosinus

Q 19. Pour $n \geqslant 2$ on effectue une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_n(x) = \left[\frac{\sin(2xt)}{2x}(\cos t)^n\right]_0^{\pi/2} + \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une deuxième intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n(x) &= \frac{n}{2x}\left[-\frac{\cos(2xt)}{2x}\sin t(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2xt)}{2x}\Big((\cos t)^n - (n-1)\sin^2 t(\cos t)^{n-2}\Big)\mathrm{d}t\\ &= \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2xt)}{2x}\Big((\cos t)^n - (n-1)(1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2}\Big)\mathrm{d}t\\ &= \frac{n}{4x^2}\Big(n\mathrm{I}_n - (n-1)\mathrm{I}_{n-2}\Big)\end{aligned}$$

On a prouvé que $\left(\dfrac{n^2}{4x^2} - 1\right)\mathrm{I}_n = \dfrac{n(n-1)}{4x^2}\mathrm{I}_{n-2}$, ce qui s'écrit aussi $\left(1 - \dfrac{4x^2}{n^2}\right)\mathrm{I}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$.
Pour $x = 0$ on obtient $\mathrm{I}_n(0) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}(0)$ donc en faisant le quotient : $\left(1 - \dfrac{4x^2}{n^2}\right)\dfrac{\mathrm{I}_n(x)}{\mathrm{I}_n(0)} = \dfrac{\mathrm{I}_{n-2}(x)}{\mathrm{I}_{n-2}(0)}$.

Q 20. Appliqué en $2n$ cette relation s'écrit : $\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)\dfrac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)} = \dfrac{\mathrm{I}_{2(n-1)}(x)}{\mathrm{I}_{2(n-1)}(0)}$. Par télescopage on en déduit :

$$\frac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\mathrm{I}_0(x)}{\mathrm{I}_0(0)}$$

On calcule $\mathrm{I}_0(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $\mathrm{I}_0(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\frac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Q 21. Appliqué avec $2n$ et $2x$ cette formule donne aussi $\displaystyle\sin(2\pi x) = 2\pi x\frac{\mathrm{I}_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(0)}\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right)$.

Dans ce produit, séparons les termes pairs et impairs : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right) = \prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) \times \prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right)$.

Il reste à faire le quotient : $\displaystyle\cos(\pi x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\sin(\pi x)} = \frac{\mathrm{I}_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(0)}\frac{\mathrm{I}_{2n}(0)}{\mathrm{I}_{2n}(x)}\prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right)$.

II.C – Un autre développement de la tangente

Q 22. Par comparaison à une intégrale, $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s}$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} = \frac{1}{2(s-1)}\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}$.

Q 23. Posons $f_p(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$. D'après la question précédente, $0 \leqslant f_p(x) \leqslant \dfrac{2^{2p}x^{2p-1}}{(2p-1)(2n-1)^{2p-1}}$.
Ceci montre que $f_p(x) \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{O}(2x)^p$. Or lorsque $x \in \mathrm{J}$ la série $\sum (2x)^p$ converge ; il en est donc de même de $\displaystyle\sum_p f_p(x)$, ce qui montre que S_n est bien définie sur J.

Q 24. Poursuivons la majoration : $0 \leqslant f_p(x) \leqslant 2\Big(\dfrac{2x}{2n-1}\Big)^{2p-1}$, donc $0 \leqslant \mathrm{S}_n(x) \leqslant 2\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{2x}{2n-1}\Big)^{2p-1}$.

Lorsque $|r| < 1$ on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} r^{2p-1} = r\sum_{p=1}^{+\infty}(r^2)^{p-1} = \frac{r}{1-r^2}$ donc ici $0 \leqslant \mathrm{S}_n(x) \leqslant \dfrac{\frac{4x}{2n-1}}{1-(\frac{2x}{2n-1})^2}$ et pour $x \in \mathrm{J}$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x) = 0$.

Q 25. D'après la question 21,

$$\ln\big(\cos(\pi x)\big) = \ln\big(\mathrm{I}_{4n}(2x)\big) - \ln\big(\mathrm{I}_{4n}(0)\big) + \ln\big(\mathrm{I}_{2n}(0)\big) - \ln\big(\mathrm{I}_{2n}(x)\big) + \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\Big)$$

On dérive pour obtenir : $-\dfrac{\pi\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} = 2\dfrac{\mathrm{I}'_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(2x)} - \dfrac{\mathrm{I}'_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(x)} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$, ce qui donne la formule souhaitée.

Q 26. On développe en série entière $\dfrac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\Big)^p = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+3}x^{2p+1}}{(2k-1)^{2p+2}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$$

(on peut intervertir car il s'agit d'une somme finie de séries convergentes).
On en déduit que $\mathrm{S}_n(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \sum_{p=1}^{+\infty} 2^{2p+1}x^{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty}2^{2p+1}x^{2p-1}\mathrm{C}(2p)\zeta(2p)$ d'après Q 18.
D'après cette même question Q 18 on a $\mathrm{C}(2p) = 1 - \dfrac{1}{2^{2p}}$, donc tout compte fait,

$$\pi\tan(\pi x) + \mathrm{S}_n(x) = -2\frac{\mathrm{I}'_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(2x)} + \frac{\mathrm{I}'_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

Q 27. Étudions $\phi : t \mapsto \sin t - t\cos t$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$: $\phi'(t) = t\sin t \geqslant 0$ donc ϕ est croissante. Sachant que $\phi(0) = 0$ on en déduit : pour tout $t \in [0,\pi/2]$, $\phi(t) \geqslant 0$.

Q 28. Pour cette question, il faut (pour l'instant) admettre que l'on peut dériver $\mathrm{I}_n(x)$ sous le signe intégral pour obtenir $\mathrm{I}'_n(x) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2t\sin(2tx)(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (les 5/2 peuvent déjà le justifier, pour les 3/2 il faudra encore attendre un peu).

On en déduit à l'aide de l'inégalité précédente : $0 \leqslant -\mathrm{I}'_n(x) \leqslant 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2tx)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2tx)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-\sin(2tx)\frac{(\cos t)^n}{n}\Big]_0^{\pi/2} + \frac{2x}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2tx)(\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{2x}{n}\mathrm{I}_n(x)$, ce qui amène à l'encadrement $0 \leqslant -\mathrm{I}'_n(x) \leqslant \dfrac{4x}{n}\mathrm{I}_n(x)$.
Il en résulte immédiatement que pour $x \in [0,1]$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{I}'_n(x)}{\mathrm{I}_n(x)} = 0$.

Q 29. À l'aide de la question précédente et de la question 24, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de la question 26 :

$$n\tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

II.D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. La formule précédente a été établie pour $x \in [0, 1/2[$; elle reste vraie par imparité pour $x \in]-1/2, 0]$ et donne le développement en série entière de la fonction tan sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ en posant $y = \pi x$, soit :

$$\tan y = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(2^{2p}-1)\zeta(2p)}{\pi^{2p}} y^{2p-1}$$

Par unicité du développement en série entière on peut identifier les coefficients avec ceux obtenus à la question 12, soit : $\dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}}$, ce qui donne $\alpha_{2n+1} = \dfrac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2)$.

Q 31. D'après la question 17, $\lim \zeta(2n+2) = 1$ donc $\alpha_{2n+1} \sim 2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2n+2}(2n+1)!$.

On peut éventuellement utiliser la formule de Stirling en ajoutant que $(2n+1)! \sim \sqrt{4\pi n}(2n+1)^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n-1}$, mais ce n'est pas indispensable.