La loi faible des grands nombres (Centrale PC 2017 – extrait)

Durée : libre

I Autour de la loi faible des grands nombres

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X.
Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.
On pourra utiliser les deux propriétés suivantes sans avoir besoin de les démontrer. Soit n un entier strictement positif et soit $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors :

- si f est une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, alors $f(X_1), \ldots, f(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes ;
- si les n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$.

I. A – Préliminaires

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note cosh, est définie, pour tout réel t, par

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

I. A. 1)

a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

I. A. 2) Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0,1]$, $e^{\lambda a + (1-\lambda) b} \leqslant \lambda e^a + (1-\lambda) e^b$.

I. A. 3) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $g(t) = t\, e^{\gamma t}$ où γ est un réel strictement négatif, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

I. B – Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

I. B. 1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α. Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

I. B. 2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p, où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

I. C – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans les sous-parties I. C et I. D, on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Dans cette sous-partie I. C, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

I. C. 1)

a) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X.

b) Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires (X_k).

I. C. 2)

a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

b) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

I. C. 3) On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\alpha, \alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & e^{-(m+\varepsilon)t}\,\Psi(t) \end{array} \right.$$

a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f_\varepsilon'(0)$.

b) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

I. C. 4) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $\Psi(t)^n$.

I. C. 5)

a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geqslant (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$, puis que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) \leqslant f_\varepsilon(t)^n$.

b) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \varepsilon\right) \leqslant r^n$.

I. C. 6) Montrer l'existence de deux réels r et s de l'intervalle $]0, 1[$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant r^n + s^n$.

I. D – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$

Dans cette sous-partie I. D, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega$, $|X(\omega)| \leqslant c$.

I. D. 1) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif. Les fonctions Ψ et f_ε des questions I. C.2 et I. C.3 sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.

I. D. 2) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{X}{2c}$.

a) Vérifier que $X = -cY + (1 - Y)c$.

b) Montrer que $e^X \leqslant Y e^{-c} + (1 - Y) e^c$.

I. D. 3)

a) Montrer que $\mathbb{E}(e^X) \leqslant \cosh(c)$.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Psi(t) \leqslant \cosh(ct)$.

I. D. 4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\varepsilon(t) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \dfrac{1}{2}c^2t^2\right)$.

I. D. 5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(-n\dfrac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

I. D. 6) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0, 1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p).

À l'aide de la question précédente, majorer $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{Z}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε.

♦ ♦
♦