La loi faible des grands nombres (Centrale PC 2017 – extrait)

I Autour de la loi faible des grands nombres

I. A – *Préliminaires*

I. A. 1)

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cosh(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n)! = n! \prod_{k=1}^{n} (n+k) \geqslant n! \prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n n!$, cette inégalité restant vraie pour $n = 0$. On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leqslant \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ puis en sommant : $\cosh(t) \leqslant e^{t^2/2}$.

I. A. 2) Posons $f(x) = \lambda e^a + (1-\lambda) e^x - e^{\lambda a + (1-\lambda)x}$ et étudions cette fonction sur $[a, +\infty[$.
$f'(x) = (1-\lambda)\left(e^x - e^{\lambda a + (1-\lambda)x}\right) \geqslant 0$ donc f est croissante. Mais $f(a) = 0$ donc pour tout $x \geqslant a$, $f(x) \geqslant 0$ et en particulier $f(b) \geqslant 0$, soit : $e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leqslant \lambda e^a + (1-\lambda) e^b$.

I. A. 3)

a) Posons $\ell = \lim_{+\infty} f(x)$. Il existe un rang A tel que $x \geqslant A \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant 1$, soit $|f(x)| \leqslant |\ell| + 1$. Mais f est continue donc bornée sur $[0, A]$; en posant $M = \max\left(\|f\|_{\infty,[0,A]}, |\ell| + 1\right)$ on a pour tout $x \geqslant 0$, $|f(x)| \leqslant M$; f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

b) g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et par croissances comparées $\lim_{+\infty} g(x) = 0$ donc d'après ce qui précède g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

I. B – *Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel*

I. B. 1) Si $X(\Omega)$ est fini, le résultat est évident. Si $X(\Omega)$ est dénombrable, on pose $X(\Omega) = \left\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Par hypothèse, $e^{\alpha|X|}$ possède une espérance, donc la série $\sum_n e^{\alpha|x_n|} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge. Or $0 \leqslant e^{\alpha x_n} \mathbb{P}(X = x_n) \leqslant e^{\alpha|x_n|} \mathbb{P}(X = x_n)$, donc la série positive $\sum_n e^{\alpha x_n} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge aussi. Autrement dit, $e^{\alpha X}$ possède une espérance.

I. B. 2) Notons que pour chacun des trois exemples la variable X est à valeurs positives, donc $e^{\alpha|X|} = e^{\alpha X}$.

a) Si $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} e^{\alpha n}$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, et $\mathbb{E}(e^{\alpha X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^\alpha)^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^\alpha - 1)}$.

b) Si $Y \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, la série $\sum_{n \geqslant 1} p q^{n-1} e^{\alpha n} = p e^\alpha \sum_{n \geqslant 0} (q e^\alpha)^n$ converge lorsque $q e^\alpha < 1$ soit $\alpha < -\ln q$, et alors $\mathbb{E}(e^{\alpha Y}) = \frac{p e^\alpha}{1 - q e^\alpha}$.

c) Si $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$, $e^{\alpha Z}$ est d'image finie donc possède une espérance, et $\mathbb{E}(e^{\alpha Z}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{\alpha k} = (p e^\alpha + q)^n$.

I. C – *Une majoration de* $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant \epsilon\right)$

I. C. 1)

a) On a $1 + \alpha|x| \leqslant e^{\alpha|x|}$ donc $0 \leqslant |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \leqslant \frac{1}{\alpha} e^{\alpha|x_n|} \mathbb{P}(X = x_n)$. Par hypothèse la série $\sum_{n \geqslant 0} e^{\alpha|x_n|} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge donc la série $\sum_{n \geqslant 0} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Ainsi, X possède une espérance.

b) On a de même $1 + \alpha|x| + \frac{\alpha^2}{2}|x|^2 \leqslant e^{\alpha|x|}$ donc $|x|^2 \leqslant \frac{2}{\alpha^2} e^{\alpha|x|}$. A l'instar de la question précédente, cette inégalité permet de prouver que X possède un moment d'ordre 2. On peut donc appliquer la loi faible des grands nombres :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} S_n - m\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{\sigma(X)^2}{n \epsilon^2}.$$

I. C. 2)

a) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction définie sur $[-\alpha, \alpha]$ par $f_n(t) = e^{tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$.
On a $\|f_n\|_\infty = e^{\alpha|x_n|}\,\mathbb{P}(X = x_n)$ et puisque X possède un moment exponentiel d'ordre α, la convergence de la série $\sum f_n$ est normale donc uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$. Ceci montre que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est définie et continue sur $[-\alpha, \alpha]$.

b) f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\alpha, \alpha]$, et $f_n'(t) = x_n\, e^{tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n)$.
Considérons un réel β tel que $0 < \beta < \alpha$. D'après I. A.3b, la fonction $t \mapsto t\,e^{(\beta-\alpha)t}$ est bornée, ce qui permet d'écrire que $t\,e^{\beta t} = O(e^{\alpha t})$. Ainsi, sur $[-\beta, \beta]$, $\|f_n'\|_\infty = |x_n|\,e^{\beta|x_n|}\,\mathbb{P}(X = x_n) = O\big(e^{\alpha|x_n|}\,\mathbb{P}(X = x_n)\big)$. Puisque X possède un moment exponentiel d'ordre α, la convergence de la série $\sum f_n'$ est normale donc uniforme sur $[-\beta, \beta]$. Ceci montre que la fonction Ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\beta, \beta]$, puis par recouvrement sur $]-\alpha, \alpha[$, et $\Psi'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, e^{tx_n}\,\mathbb{P}(X = x_n) = \mathbb{E}(X\,e^{tX})$.

I. C. 3)

a) $f_\epsilon(0) = \Psi(0) = \mathbb{E}(1) = 1$ et $f_\epsilon'(0) = -(m+\epsilon)\Psi(0) + \Psi'(0) = -(m+\epsilon) + \mathbb{E}(X) = -\epsilon$.

b) Au voisinage de 0 on a $f_\epsilon(t) = 1 - \epsilon t + o(t)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]0, \eta]$, $1 - \dfrac{3\epsilon}{2}t \leqslant f_\epsilon(t) \leqslant 1 - \dfrac{\epsilon}{2}t$.
Lorsque $0 < t_0 < \min\Big(\eta, \dfrac{2}{3\epsilon}\Big)$ on a $0 < f_\epsilon(t_0) < 1$.

I. C. 4) Soit $t \in [-\alpha, \alpha]$. On a $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{tX_k}$. D'après I. C.2 chacune des variables e^{tX_k} possède une espérance égale à $\Psi(t)$. De plus, les variables (X_k) sont mutuellement indépendantes donc il en est de même des variables e^{tX_k}. On en déduit que e^{tS_n} possède une espérance, et que celle-ci vaut $\prod_{k=1}^{n} \Psi(t) = \Psi(t)^n$.

I. C. 5)

a) Pour tout $t \in]0, \alpha]$, $\dfrac{S_n}{n} \geqslant m + \epsilon \iff e^{tS_n} \geqslant e^{nt(m+\epsilon)}$, donc $\mathbb{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\epsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(e^{tS_n} \geqslant e^{nt(m+\epsilon)}\Big)$.
La variable aléatoire e^{tS_n} est à valeurs positives et possède une espérance, donc d'après l'inégalité de Markov, pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\Big(e^{tS_n} \geqslant a\Big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(e^{tS_n})}{a} = \dfrac{\Psi(t)^n}{a}$. Appliqué à $a = e^{t(m+\epsilon)n}$ on obtient $\mathbb{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\epsilon\Big) \leqslant \Big(\Psi(t)\,e^{-t(m+\epsilon)}\Big)^n = f_\epsilon(t)^n$.

b) Appliquons ceci au réel t_0 obtenu à la question I. C.3 : on obtient $\mathbb{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\epsilon\Big) \leqslant r^n$ avec $r = f_\epsilon(t_0) \in]0,1[$.

I. C. 6) Posons $Y = -X$. Y est d'espérance finie, et $\mathbb{E}(Y) = -\mathbb{E}(X) = -m$. De plus, Y admet un moment exponentiel d'ordre α puisque $|Y| = |X|$. On peut donc appliquer ce qui précède à la suite $Y_k = -X_k$ et obtenir l'existence d'un réel s dans $]0,1[$ tel que $\mathbb{P}\Big(\dfrac{-S_n}{n} \geqslant -m+\epsilon\Big) \leqslant s^n$, soit encore $\mathbb{P}\Big(\dfrac{S_n}{n} \leqslant m-\epsilon\Big) \leqslant s^n$.
Les événements $\Big\{\dfrac{S_n}{n} \geqslant m+\epsilon\Big\}$ et $\Big\{\dfrac{S_n}{n} \leqslant m-\epsilon\Big\}$ sont incompatibles, donc

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - m\Big| \leqslant \epsilon\Big) = \mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \geqslant m+\epsilon\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} \leqslant m-\epsilon\Big) \leqslant r^n + s^n$$

I. D – Une majoration de $\mathbb{P}\Big(\Big|\dfrac{S_n}{n}\Big| \geqslant \epsilon\Big)$

I. D. 1) On a $0 \leqslant e^{\alpha|x_n|}\,\mathbb{P}(X = x_n) \leqslant e^{\alpha c}\,\mathbb{P}(X = x_n) = O\big(\mathbb{P}(X = x_n)\big)$. Mais la série $\sum_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge (sa somme vaut 1) donc il en est de même de la série $\sum e^{\alpha|x_n|}\,\mathbb{P}(X = x_n)$, ce qui montre que X possède un moment exponentiel d'ordre α.

I. D. 2)

a) $X = c(1-2Y) = c(1-Y) - cY$.

b) Puisque $-c \leqslant X \leqslant c$ on a $0 \leqslant Y \leqslant 1$ donc on peut appliquer la question I. A.2 pour obtenir $e^X \leqslant Y\,e^{-c} + (1-Y)\,e^c$.

I. D. 3)

a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2}$ et par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}(e^X) \leqslant e^{-c}\,\mathbb{E}(Y) + e^c(1 - \mathbb{E}(Y)) = \cosh(c)$.

b) Soit $t > 0$ et $Z = tX$. On a $\mathbb{E}(Z) = t\mathbb{E}(X) = 0$ et $|Z| \leqslant tc$ donc on peut appliquer la question précédente à la variable Z pour obtenir $\mathbb{E}(Z) \leqslant \cosh(tc)$, soit $\Psi(t) \leqslant \cosh(ct)$.

I. D. 4) D'après I. A.1 on a donc $\Psi(t) \leqslant e^{c^2t^2/2}$. Or puisque $m = 0$ on a $f_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t}\,\Psi(t)$, donc $f_\epsilon(t) \leqslant \exp\Bigl(-\epsilon t + \dfrac{1}{2}c^2t^2\Bigr)$.

I. D. 5) Puisque X possède un moment exponentiel d'ordre α (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$) on peut appliquer la question I. C.5a : pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}\Bigl(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Bigr) \leqslant f_\epsilon(t)^n \leqslant \exp\Bigl(-n\epsilon t + \dfrac{n}{2}c^2t^2\Bigr)$.

Étudions maintenant sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $h : t \mapsto -\epsilon t + \dfrac{1}{2}c^2t^2$. On a $h'(t) = -\epsilon + c^2t$ donc la fonction h est décroissante sur $\Bigl[0, \dfrac{\epsilon}{c^2}\Bigr]$, puis croissante sur $\Bigl[\dfrac{\epsilon}{c^2}, +\infty\Bigl[$. Elle est donc minimale pour $t_0 = \dfrac{\epsilon}{c^2}$ et pour cette valeur de t, l'inégalité précédente fournit la majoration : $\mathbb{P}\Bigl(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Bigr) \leqslant \exp\bigl(nh(t_0)\bigr) = \exp\Bigl(-n\dfrac{\epsilon^2}{2c^2}\Bigr)$.

En appliquant cette majoration à la variable $-X$ on obtient aussi $\mathbb{P}\Bigl(-\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Bigr) \leqslant \exp\Bigl(-n\dfrac{\epsilon^2}{2c^2}\Bigr)$, et les événements $\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon$ et $-\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon$ étant incompatibles, on en conclut que $\mathbb{P}\Bigl(\Bigl|\dfrac{S_n}{n}\Bigr| \geqslant \epsilon\Bigr) = \mathbb{P}\Bigl(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Bigr) + \mathbb{P}\Bigl(-\dfrac{S_n}{n} \geqslant \epsilon\Bigr) \leqslant 2\exp\Bigl(-n\dfrac{\epsilon^2}{2c^2}\Bigr)$.

I. D. 6) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, et $X = Y - p$. Alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \{-p, 1-p\}$ donc $|X(\omega)| \leqslant \max(p, 1-p) = c$. Les conditions sont donc réunies pour appliquer la question précédente.

Mais ici $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k - np$, où les $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de Bernoulli de paramètre p donc $S_n = Z - np$ où Z suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Ainsi, la question précédente prouve que $\mathbb{P}\Bigl(\Bigl|\dfrac{Z}{n} - p\Bigr| \geqslant \epsilon\Bigr) \leqslant 2\exp\Bigl(-n\dfrac{\epsilon^2}{2c^2}\Bigr)$ avec $c = \max(p, 1-p)$.