Transformation de Laplace et convolution (centrale PC 2007)

Durée : libre

Dans tout le problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

I Partie I

I. A –

I. A. 1) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $m_n(f) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On admettra dans toute la suite de ce problème que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

I. A. 2) Déterminer m_1.

I. A. 3) Lorsque $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence liant m_n et m_{n-2}. En déduire une expression de m_n en fonction de n.

I. B – Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de t.

On pourra considérer la forme canonique du trinôme $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} - tx$.

I. C –

I. C. 1) Le réel t étant fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{S}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x)$.

I. C. 2) Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}$.

I. C. 3) Retrouver la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenue précédemment.

II Partie II

Dans toute la suite du problème, on note E *l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif* $\mathrm{M}(g)$ *et un réel strictement positif λ vérifiant :* $\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)| \leqslant \mathrm{M}(g) f(\lambda x)$.

II. A – Démontrer que E muni des lois + et $\cdot$ usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient f.

II. B – Soient u et v deux éléments de E. On note $u * v$ l'application définie, pour tout réel x pour lequel la formule a un sens, par

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) v(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

II. B. 1) Démontrer que $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II. B. 2) Démontrer que $u * v = v * u$.

II. B. 3) Déterminer $(f * f)(x)$.

II. B. 4) Démontrer que $u * v$ appartient à E (on utilisera le résultat de la question précédente).

II. C – Soit $u \in$ E. On définit l'application $\widehat{u}$ par : $\widehat{u}(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} u(x)\,\mathrm{d}x$.

II. C. 1) Montrer que $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

II. C. 2) Montrer que $\widehat{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}''(t)$ à l'aide d'intégrales.

II. D – *Dans cette section D seulement, on admet le résultat suivant.*

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x,y)| \leqslant h_1(x)h_2(y)$$

alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ *sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.*

Soient u et v deux éléments de E.

II. D. 1) Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:

$$-t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2 + x^2).$$

II. D. 2) Démontrer la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

II. D. 3) Démontrer la relation, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u * v}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x\theta}(u * v)(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta)\widehat{v}(\theta).$$

On pourra utiliser l'égalité $\left(t + \dfrac{\theta}{2\gamma}\right)^2 + \left(\left(x + \dfrac{\theta}{\gamma}\right) - \left(t + \dfrac{\theta}{2\gamma}\right)\right)^2 = t^2 + (x-t)^2 + \dfrac{\theta x}{\gamma} + \dfrac{\theta^2}{2\gamma^2}$.

Dans la suite de ce problème, on considère le sous-ensemble E_1 *de* E *dont les éléments sont les fonctions* $h \in \mathrm{E}$ *telles que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. *On notera que la fonction f de la partie I est un élément de* E_1. *à toute fonction* $h \in \mathrm{E}_1$, *on associe la suite de fonctions* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par la récurrence suivante :*

$$h_1 = h \quad \text{et pour tout } n \geqslant 2, \quad h_n = h_{n-1} * h.$$

On remarquera que la fonction h_n est alors élément de E *d'après II.B.4.*
L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

III Partie III

III. A – Soit h un élément de E_1.

III. A. 1) Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E_1.

III. A. 2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

III. B – Dans cette question, on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ étudiée dans la partie I (on a donc posé $h = f$).

III. B. 1) Déterminer une constante K_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = \mathrm{K}_2\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

III. B. 2) Déterminer une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \mathrm{K}_n\,\mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$.

III. B. 3) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

III. C – Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

III. C. 1) Démontrer que $g \in \mathrm{E}_1$.

III. C. 2) Montrer que la fonction $g * g$ est paire. Donner pour $x \geqslant 0$ l'expression de $(g * g)(x)$ en fonction des valeurs de x : on distinguera deux intervalles pour x.

III. C. 3) Démontrer que g_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-a_n, a_n]$ que l'on précisera.

III. C. 4) Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

III. C. 5) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ en fonction de t.

IV Partie IV

Soit h un élément de E_1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{M}_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{M}_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \textit{et} \quad \mathrm{V}_n = \mathrm{M}_{2,n} - \mathrm{M}_{1,n}^2.$$

IV. A –

IV. A. 1) Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité à l'ordre 2 en zéro dont on précisera les coefficients à l'aide de $\mathrm{M}_{1,n}$ et $\mathrm{M}_{2,n}$.

IV. A. 2) En déduire que $\mathrm{M}_{1,n} = n\mathrm{M}_{1,1}$ et $\mathrm{V}_n = n\mathrm{V}_1$.

IV. B – On suppose dans cette question que la fonction h est telle que $\mathrm{M}_{1,1} = 0$.

Déterminer la limite de la suite $(\widehat{h_n}(\frac{t}{\sqrt{n}}))_{n\in\mathbb{N}^*}$

♦ ♦

♦