Corrigé : transformation de Laplace et convolution (centrale PC 2007)

I Partie I

I. A –

I. A. 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{\pm\infty} x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$ (croissances comparées) donc $x^n f(x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$. Par comparaison aux intégrales de Riemann on en déduit que $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I. A. 2) La fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire donc pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$. En faisant tendre X vers $+\infty$ on en déduit $m_1 = 0$.

I. A. 3) L'intégration par parties décrite par le schéma $\begin{array}{c|cc|} + & x^{n-1} & x\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \\ - & (n-1)x^{n-2} & -\mathrm{e}^{-x^2/2} \end{array}$ donne :

$$\forall n \geqslant 2, \qquad m_m = \left[\frac{-1}{\sqrt{2\pi}} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + (n-1)m_{n-2} \qquad \text{soit} \quad m_n = (n-1)m_{n-2}.$$

Sachant que $m_1 = 0$ on en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$, $m_{2p+1} = 0$.
Sachant que $m_0 = 1$ on en déduit pour tout $p \in \mathbb{N}$, $m_{2p} = (2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1) = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

I. B – Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\pm\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$ (croissances comparées) donc $\mathrm{e}^{-tx} f(x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
L'égalité $-\dfrac{x^2}{2} - tx = -\dfrac{1}{2}(x+t)^2 + \dfrac{t^2}{2}$ conduit à $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x+t)^2/2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{t^2/2} m_0 = \mathrm{e}^{t^2/2}$ en effectuant le changement de variable $y = x + t$.

I. C –

I. C. 1) On reconnait le début du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(x) = \mathrm{e}^{-tx} f(x)$.

I. C. 2) Fixons dans cette question le réel t. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est continue par morceaux et converge simplement vers la fonction $\mathrm{S} : x \mapsto \mathrm{e}^{-tx} f(x)$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathrm{S}_n(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|tx|^k}{k!} f(x) = \mathrm{e}^{|tx|} f(x) = \phi(x)$. La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\phi(x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions S_n et S sont intégrables sur $\mathbb{R}$, et

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{S}(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{S}_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

I. C. 3) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{t^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^p = \mathrm{e}^{t^2/2}$; on retrouve la valeur déjà obtenue à la question I.B.

II Partie II

II. A – On montre que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles :

- E contient de manière évidente la fonction nulle ;
- si g_1 et g_2 sont éléments de E et k un nombre réel, il existe λ_1 et λ_2 strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g_1(x)| \leqslant \mathrm{M}(g_1) f(\lambda_1 x)$ et $|g_2(x)| \leqslant \mathrm{M}(g_2) f(\lambda_2 x)$ et alors :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |kg_1(x) + g_2(x)| \leqslant |k|\mathrm{M}(g_1) f(\lambda_1 x) + \mathrm{M}(g_2) f(\lambda_2 x) \leqslant \mathrm{M} f(\lambda x)$ avec $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ et $\mathrm{M} = |k|\mathrm{M}(g_1) + \mathrm{M}(g_2)$ donc $kg_1 + g_2 \in \mathrm{E}$.

De plus, $f \in \mathrm{E}$ car f est continue et l'inégalité est vérifiée en prenant $\lambda = 1$ et $\mathrm{M}(f) = 1$.

II. B –

II. B. 1) Fixons $x \in \mathbb{R}$. Puisque u et v appartiennent à E, il existe λ et μ strictement positifs tels que

$$u(t)v(x-t) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(f(\lambda t)f(\mu(x-t))).$$

Or $f(\lambda t)f(\mu(x-t)) = \dfrac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(\lambda^2t^2/2+\mu^2(x-t)^2/2)} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées, donc la fonction $t \mapsto u(t)v(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $u*v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II. B. 2) Le changement de variable $u = x-t$ ne modifie pas la nature de l'intégrale est donne $u*v = v*u$.

II. B. 3) On calcule $(f*f)(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-t^2+xt}\,\mathrm{d}t$ et on s'inspire de la question I.B pour calculer cette intégrale : $-t^2+xt = -\left(t-\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{x^2}{4}$ donc $(f*f)(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\sqrt{2}\pi}\displaystyle\int_{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-v^2/2}\,\mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}} m_0 = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}}$ en ayant posé successivement $u = t - \dfrac{x}{2}$ puis $v = u\sqrt{2}$. On obtient donc $(f*f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

II. B. 4) Soit λ et μ strictement positifs tels que $|u(t)| \leqslant \mathrm{M}(u)f(\lambda t)$ et $|v(t)| \leqslant \mathrm{M}(v)f(\mu t)$.
Montrons tout d'abord que $u*v$ est continue, en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Pour cela on pose $g(x,t) = u(t)v(x-t)$.
Puisque u et v sont continues, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et la fonction $x \mapsto g(x,t)$ continue. De plus, Il existe $\mu > 0$ tel que $|v(x-t)| \leqslant \mathrm{M}(v)f(\mu(x-t)) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}(v)}{\sqrt{2\pi}}$ donc $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}(v)}{\sqrt{2\pi}}|u(t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}(v)\mathrm{M}(u)}{\sqrt{2\pi}} f(\lambda t) = \phi(t)$. Cette fonction est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car f l'est donc le théorème s'applique et la fonction $u*v$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, $|(u*v)(x)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda t)f(\mu(x-t))\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\nu t)f(\nu(x-t))\,\mathrm{d}t$ avec $\nu = \min(\lambda,\mu)$.

Le changement de variable $s = \nu t$ conduit alors à $|(u*v)(x)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)\dfrac{(f*f)(\nu x)}{\nu} = \dfrac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{\nu\sqrt{2}} f\left(\dfrac{\nu}{\sqrt{2}}x\right)$, ce qui achève de prouver que $u*v \in \mathrm{E}$.

II. C –

II. C. 1) Avec les mêmes notations et à $t \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $|\mathrm{e}^{-tx}u(x)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{e}^{-tx}f(\lambda x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ par croissances comparées donc $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}u(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{u}(x)$ est bien définie.

II. C. 2) Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème de dérivation étendu aux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. Pour cela on pose $g(t,x) = \mathrm{e}^{-tx}u(x)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (question précédente).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, et $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x) = -x\mathrm{e}^{-tx}u(x)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,x) = x^2\mathrm{e}^{-tx}u(x)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,x)$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Fixons maintenant $\alpha > 0$ et considérons $t \in [-\alpha,\alpha]$. On a $\left|\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x)\right| \leqslant |x|\mathrm{e}^{\alpha|x|}|u(x)| = \phi_1(x)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,x)\right| \leqslant x^2\mathrm{e}^{\alpha|x|}|u(x)| = \phi_2(x)$.
Ces deux fonctions sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ car $u(x) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(e^{-2\alpha|x|})$ donc le théorème s'applique : la fonction $\widehat{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[-\alpha,\alpha]$ puis par recouvrement sur $\mathbb{R}$, et $\widehat{u}'(t) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\mathrm{e}^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x$ et $\widehat{u}''(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2\mathrm{e}^{-tx}u(x)\,\mathrm{d}x$.

II. D –

II. D. 1) Pour $t = 0$ il suffit de faire en sorte que $a \leqslant 1$. Pour $t \neq 0$ il suffit de faire en sorte que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $-1-(y-1)^2 \leqslant -a(1+y^2)$ en ayant posé $y = \dfrac{x}{t}$ soit encore $(1-a)y^2 - 2y + (2-a) \geqslant 0$. Le discriminant réduit de cette équation vaut $\Delta(a) = 1-(1-a)(2-a) = -1+3a-a^2$. Pour $a \in]0,1[$ proche de 0 on a $\Delta(a) < 0$ donc pour un tel a le polynôme $(1-a)y^2 - 2y + (2-a)$ garde un signe constant, positif compte tenu du signe du coefficient dominant.

Remarque. Un calcul (sans grand intérêt) montre que la condition $\Delta(a) \leqslant 0$ est vérifiée pour $a \in \left]0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right[$.

II. D. 2) Posons $g(x,t) = u(t)v(x-t)$. Cette application est continue, et avec les notations précédentes,

$$|g(x,t)| \leqslant \mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)f(\lambda t)f(\mu(x-t)) \leqslant \frac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\nu^2(t^2+(x-t)^2)/2} \qquad \text{avec } \nu = \min(\lambda,\mu).$$

D'après la question précédente, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}(u)\mathrm{M}(v)}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-a\nu^2(t^2+x^2)/2} = \mathrm{M}(u)f(\sqrt{a}\nu x)\times\mathrm{M}(v)f(\sqrt{a}\nu t)$.
Puisque f est intégrable on peut appliquer le théorème admis : les intégrales ci-dessous sont convergentes et

$$\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}t\Big)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t$$

soit $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}(u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} v(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} v(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{d}t\times\int_{\mathbb{R}} v(s)\,\mathrm{d}s$ avec $s = x-t$.

II. D. 3) Nous venons de montrer à la question précédente que $\widehat{u*v}(0) = \widehat{u}(0)\widehat{v}(0)$; il s'agit maintenant de faire de même pour un réel θ quelconque.
On pose maintenant $g(x,t) = \mathrm{e}^{-x\theta}\,u(t)v(x-t)$. La majoration $|g(x,t)| \leqslant \mathrm{M}(u)\,\mathrm{e}^{-x\theta}f(\sqrt{a}\nu x)\times\mathrm{M}(v)f(\sqrt{a}\nu t)$ justifie l'interversion des intégrales d'après le résultat admis, ce qui conduit à :

$$\widehat{u*v}(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x\theta}\,v(x-t)\,\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{e}^{-t\theta}\Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-s\theta}\,v(s)\,\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t = \widehat{u}(\theta)\widehat{v}(\theta) \quad \text{avec } s = x-t$$

III Partie III

III. A –

III. A. 1) D'après la question II.D.2, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} h_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} h_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x$ donc par récurrence immédiate $h_n \in \mathrm{E}_1$.

III. A. 2) D'après la question II.D.3, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x) = \widehat{h_{n-1}}(x)\widehat{h}(x)$ donc par récurrence immédiate $\widehat{h_n}(x) = \big(\widehat{h}(x)\big)^n$.

III. B –

III. B. 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_2(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)f(x-t)\,\mathrm{d}t = (f*f)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$ d'après la question II.B.3.

III. B. 2) Raisonnons par récurrence en supposant l'existence de K_{n-1} acquise. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{K}_{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/(2n-2)}\,\mathrm{e}^{-(x-t)^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}_{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{xt}\,\mathrm{e}^{-nt^2/(2n-2)}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $s = t\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$; on obtient

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{K}_{n-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{xs\sqrt{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{e}^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s = \mathrm{K}_{n-1}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\,\widehat{f}\Big(-x\sqrt{\frac{n-1}{n}}\Big).$$

D'après la question I.B, $\widehat{f}\Big(-x\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\Big) = \mathrm{e}^{(\frac{n-1}{n})x^2/2}$ donc $f_n(x) = \mathrm{K}_{n-1}\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\,\mathrm{e}^{-x^2/(2n)}$.

Ceci prouve l'existence de la suite $(\mathrm{K}_n)_{n\geqslant1}$, définie par $\mathrm{K}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et la relation de récurrence $\mathrm{K}_n = \mathrm{K}_{n-1}\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}$, relation qui fournit aisément l'égalité $\mathrm{K}_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

III. B. 3) $\widehat{f_n}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \Big(\widehat{f}\Big(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n = \big(\mathrm{e}^{t^2/(2n)}\big)^n = \mathrm{e}^{t^2/2}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\widehat{f_n}\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \mathrm{e}^{t^2/2}$ (cette suite est constante).

III. C –

III. C. 1) g est continue sur $\mathbb{R}$ car $\cos(\pi/2)=\cos(-\pi/2)=0$.

Pour tout $x\in[-\pi/2,\pi/2]$, $g(x)\leqslant \frac{1}{2}\leqslant M(g)f(x)$ avec $M(g)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\,e^{\pi^2/8}$, inégalité qui reste vraie pour $|x|>\frac{\pi}{2}$ puisqu'alors $g(x)=0$. Ainsi $g\in E$.

Enfin, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)\,dx=1$ donc $g\in E_1$.

III. C. 2) Puisque g est paire,

$$(g*g)(-x)=\int_{\mathbb{R}} g(t)g(-x-t)\,dt=\int_{\mathbb{R}} g(t)g(x+t)\,dt=\int_{\mathbb{R}} g(-s)g(x-s)\,ds \text{ (avec } s=-t)=\int_{\mathbb{R}} g(s)g(x-s)\,ds=(g*g)(x)$$

La fonction $g*g$ est paire.

Pour tout $x\geqslant 0$, $(g*g)(x)=\frac{1}{4}\int_{I(x)}\cos(t)\cos(x-t)\,dt$ où $I(x)=\left\{t\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2} \text{ et } x-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant x+\frac{\pi}{2}\right\}=\left\{t\in\mathbb{R}\;\middle|\;x-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$.

Si $x\geqslant\pi$, $I(x)=\varnothing$ et $(g*g)(x)=0$; si $0\leqslant x\leqslant\pi$, $(g*g)(x)=\frac{1}{4}\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)+\cos(2t-x)}{2}\,dt=\frac{(\pi-x)\cos(x)+\sin(x)}{8}$.

III. C. 3) On peut penser que g_n est nulle en dehors de l'intervalle $[-a_n,a_n]$ avec $a_n=\frac{n\pi}{2}$. Ce résultat est vrai pour $n=1$ et $n=2$; nous allons le démontrer par récurrence pour un entier n quelconque.

Il est facile de prouver que si u et v sont des fonctions paires il en est de même de $u*v$ (c'est la même preuve qu'à la question précédente), ce qui permet de prouver par récurrence que g_n est paire.

Considérons alors $x\geqslant 0$ et $g_n(x)=\int_{\mathbb{R}} g_{n-1}(t)g(x-t)\,dt$. Pour $t\geqslant a_{n-1}=(n-1)\frac{\pi}{2}$ on a $g_{n-1}(t)=0$ et pour $t<x-\frac{\pi}{2}$ on a $g(x-t)=0$. Ainsi, lorsque $a_{n-1}<x-\frac{\pi}{2}$ on a $g_{n-1}(t)g(x-t)=0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et $g_n(x)=0$. Autrement dit, lorsque $x>a_{n-1}+\frac{\pi}{2}=\frac{n\pi}{2}=a_n$ on a $g_n(x)=0$, ce qui prouve que g_n est nulle en dehors de $[-a_n,a_n]$.

III. C. 4) $\widehat{g}(t)=\int_{\mathbb{R}} e^{-xt}g(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-xt}\cos(x)\,dx$. On effectue deux intégrations par parties successives :

$$\begin{array}{c|cc|}
+ & e^{-xt} & \cos(x) \\
- & -t\,e^{-xt} & \sin(x) \\
+ & t^2\,e^{-xt} & -\cos(x)
\end{array}$$

qui conduisent à l'égalité : $\widehat{g}(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-\pi t/2}+e^{\pi t/2}\right)-t^2\widehat{g}(t)$ puis $\widehat{g}(t)=\frac{\mathrm{ch}(\pi t/2)}{1+t^2}$.

III. C. 5) $\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\left(\widehat{g}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n=\left(\frac{\mathrm{ch}(\pi t/(2\sqrt{n}))}{1+t^2/n}\right)^n$.

On a $\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}=e^{-n\ln(1+\frac{t^2}{n})}=e^{-t^2+o(1)}$ et $\mathrm{ch}\left(\frac{\pi t}{2\sqrt{n}}\right)=1+\frac{\pi^2t^2}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{ch}\left(\frac{\pi t}{2\sqrt{n}}\right)^n=e^{\pi^2t^2/8}$.

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}\widehat{g_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=e^{(\pi^2/8-1)t^2}$.

IV Partie IV

IV. A –

IV. A. 1) D'après la question II.C.2 la fonction $\widehat{h_n}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc possède un développement limité en 0 donné par : $\widehat{h_n}(t)\underset{0}{=}a+bt+c\frac{t^2}{2}+o(t^2)$ avec $a=\widehat{h_n}(0)$, $b=\widehat{h_n}'(0)$ et $c=\widehat{h_n}''(0)$.

On a $a=\int_{\mathbb{R}} h_n(x)\,dx=1$ car $h\in E_1$ donc $h_n\in E_1$ (question III.A.1).

D'après la question II.C.2 On a $b=-\int_{\mathbb{R}} xh_n(x)\,dx=-M_{1,n}$ et $c=\int_{\mathbb{R}} x^2h_n(x)\,dx=M_{2,n}$ donc $\widehat{h_n}(t)\underset{0}{=}1-M_{1,n}t+M_{2,n}\frac{t^2}{2}+o(t^2)$.

IV. A. 2) Pour $n=1$ on a aussi $\widehat{h}(t)\underset{0}{=}1-M_{1,1}t+M_{2,1}\frac{t^2}{2}+o(t^2)$. Mais $\widehat{h_n}(t)=\widehat{h}(t)^n$ donc

$$\widehat{h_n}(t)\underset{0}{=}\left(1-M_{1,1}t+M_{2,1}\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)^n\underset{0}{=}1-nM_{1,1}t+\left(nM_{2,1}+n(n-1)M_{1,1}\right)\frac{t^2}{2}+o(t^2)$$

et par unicité d'un développement limité on en déduit $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $M_{2,n} = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1}$.
En particulier, $V_n = nM_{2,1} + n(n-1)M_{1,1} - n^2M_{1,1} = nM_{2,1} - nM_{1,1} = nV_1$.

IV. B – On fixe $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \widehat{h}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{M_{2,1}}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{M_{2,1}}{2n}t^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{M_{2,1}t^2/2+o(1)}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \widehat{h}_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{M_{2,1}t^2/2}$.