Corrigé : le théorème de Perron-Frobenius (Centrale PC 2023)

I Résultats préliminaires

Q 1. Puisque $X \neq 0$, il existe $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $X_{j_0} > 0$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a alors $[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j \geqslant A_{ij_0}X_{j_0} > 0$ donc $AX > 0$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|AB|_{ij} = \Bigl|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\Bigr| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| = [|A| \cdot |B|]_{ij}$ donc $|AB| \leqslant |A| \cdot |B|$.

Q 2. Pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\bigl|\langle X \mid Y\rangle\bigr| \leqslant \|X\| \cdot \|Y\|$, soit : $\Bigl|\sum_{k=1}^{n} X_k Y_k\Bigr| \leqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} Y_k^2\Bigr)^{1/2}$.

Appliqué aux vecteurs $X = \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_n| \end{pmatrix}$ on obtient $\sum_{k=1}^{n} |z_k| \cdot |w_k| \leqslant \Bigl(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\Bigr)^{1/2}$.

Q 3. Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $|1+z|^2 = 1 + 2x + x^2 + y^2$ et $(1+|z|)^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2\sqrt{x^2+y^2}$ donc $|1+z| = 1 + |z| \iff x = \sqrt{x^2+y^2} \iff x \geqslant 0$ et $y = 0$, soit $z \in \mathbb{R}_+$.

Lorsque $z \neq 0$, $|z+z'| = |z| + |z'| \iff \Bigl|1 + \dfrac{z'}{z}\Bigr| = 1 + \Bigl|\dfrac{z'}{z}\Bigr|$ donc d'après ce qui précède, $|z+z'| = |z| + |z'| \iff \dfrac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$; il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \alpha z$.

Q 4. Raisonnons par récurrence sur n :

– si $n = 1$, il suffit de prendre pour θ un argument de z_1 si $z_1 \neq 0$, et n'importe quel réel si $\alpha = 0$;

– si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Si $z_1 = 0$ on peut appliquer directement le résultat au rang $n-1$; on suppose donc $z_1 \neq 0$.

  Posons $Z = \sum_{k=2}^{n} z_k$. On a $|z_1 + Z| \leqslant |z_1| + |Z| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k| = |z_1 + Z|$ donc $|z_1 + Z| = |z_1| + |Z|$. D'après la question précédente, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $Z = \alpha z_1$.

  Ce même encadrement montre aussi que $|Z| = \sum_{k=2}^{n} |z_k|$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $z_k = e^{i\theta}|z_k|$. On a donc $Z = \alpha z_1 = e^{i\theta}\sum_{k=2}^{n} |z_k|$. Si $\alpha = 0$ alors $z_2 = \cdots = z_n = 0$ et on est ramené au cas $n = 1$; si $\alpha > 0$ alors $e^{-i\theta} z_1 \in \mathbb{R}_+$ et donc $z_1 = e^{i\theta}|z_1|$.

II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Q 5. $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$ donc $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$.

Q 6. On a $(a-d)^2 \geqslant 0$ et $bc > 0$ donc $\Delta > 0$. Le polynôme caractéristique χ_A possède donc deux racines réelles distinctes$\lambda < \mu$; il est scindé à racines simples donc A est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q 7. On a $\lambda + \mu = a + d > 0$ donc $\mu > 0$. Le tableau des variations de χ_A est de la forme suivante :

x	$-\infty$		λ				μ		$+\infty$
$\chi_A(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On calcule $\chi_A(-\mu) = \mu^2 + (a+d)\mu + (ad - bc) = 2\mu(a+d) > 0$ car $\mu^2 - (a+d)\mu + (ad - bc) = 0$ donc, compte tenu du tableau des variations ci-dessus, on a nécessairement $-\mu < \lambda$, et donc $|\lambda| < \mu$.

Q 8. A est diagonalisable donc il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\begin{pmatrix}\mu^n & 0\\ 0 & lambda^n\end{pmatrix}P^{-1}$.
La suite (A^n) converge donc si et seulement si les suites (λ^n) et (μ^n) convergent, autrement di si et seulement si $\lambda \in]-1,1]$ et $\mu \in]-1,1]$.
Sachant que $|\lambda| < \mu$ cette condition se réduit à $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, et pour que cette limite soit non nulle, il faut en plus que $\mu = 1$.
Dans ce cas, $L = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$ donc $\operatorname{rg} L = 1$ et $L^2 = 1$: L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Q 9. les quatre coefficients de B sont strictement positifs donc d'après les questions précédentes, B est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$ avec $|\lambda| \leqslant \mu$.
On a $\chi_B(x) = x^2 - (2-\alpha-\beta)x + 1 - \alpha - \beta = (x-1)(x-1+\alpha+\beta)$ donc par identification $\mu = 1$ et $\lambda = 1-\alpha-\beta$ et B est semblable à $D = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-\alpha-\beta\end{pmatrix}$.
On résout $BX = X \iff \alpha X_1 = \beta X_2$ et $BX = (1-\alpha-\beta)X \iff X_2 = -X_1$ donc en posant $S = \begin{pmatrix}\beta & -1\\ \alpha & 1\end{pmatrix}$ on a $B = SDS^{-1}$.

Q 10. D'après la question 8, $\lim B^n = S\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}S^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix}\beta & \beta\\ \alpha & \alpha\end{pmatrix}$.

III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

III. A – Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Q 11. Montrons tout d'abord que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme :

- $\|A\|_\infty = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| = 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \forall j \in [\![1,n]\!],\ A_{ij} = 0 \iff A = 0$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda A_{ij}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(|\lambda| \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\Big) = |\lambda| \cdot \|A\|_\infty$;
- pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |A_{ij} + B_{ij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| \leqslant \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$ donc $\|A+B\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$.

Montrons maintenant qu'elle est sous-multiplicative :
pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |B_{kj}| \leqslant \|B\|_\infty \sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \leqslant \|B\|_\infty \|A\|_\infty$; on en déduit que $\|AB\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Q 12.
$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\Big|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}|\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |B_{kj}| \cdot |A_{i\ell}| \cdot |B_{\ell j}|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |A_{i\ell}|\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}| \cdot |B_{\ell j}|\Big)$$
D'après la question 2, $\sum_{i=1}^{n} |A_{ik}| \cdot |A_{i\ell}| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_{ik}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} |A_{i\ell}|^2\Big)^{1/2}$ et $\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}| \cdot |B_{\ell j}| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n} |B_{\ell j}|^2\Big)^{1/2}$.
Toujours d'après la question 2, $\sum_{\ell=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} |A_{i\ell}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n} |B_{\ell j}|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |B_{\ell j}|^2\Big)^{1/2} = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ et de même $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} |A_{ik}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |B_{kj}|^2\Big)^{1/2} = \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$ donc en définitive, $\|AB\|_2^2 \leqslant \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2$, ce qui prouve que $\|\cdot\|_2$ est sous-multiplicative.

Q 13. Montrons que ν est une norme :

- $\mu(A) = 0 \iff N(S^{-1}AS) = 0 \iff S^{-1}AS = 0 \iff A =$;
- $\nu(\lambda A) = N(\lambda S^{-1}AS) = |\lambda| N(S^{-1}AS) = |\lambda|\nu(A)$;

– $\nu(A+B) = N(S^{-1}(A+B)S) \leqslant N(S^{-1}AS) + N(S^{-1}BS) = \nu(A) + \nu(B)$.

Montrons qu'elle est sous-multiplicative : $\nu(AB) = N(S^{-1}ABS) = N(S^{-1}AS \cdot S^{-1}BS) \leqslant N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) = \nu(A)\nu(B)$.

III. B – Rayon spectral

III. B. 1)

Q 14. On a $\mathrm{Sp}(S^{-1}AS) = \mathrm{Sp}(A)$ donc $\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$.

Q 15. Le polynôme caractéristique de A est scindé car élément de $\mathbb{C}[X]$ donc A est trigonalisable. Il existe donc $S \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $S^{-1}AS$ est triangulaire; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses éléments diagonaux.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S^{-1}A^kS = (S^{-1}AS)^k$ est triangulaire et ses éléments diagonaux sont $\lambda_1^k, \ldots \lambda_n^k$ donc $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.
$S^{-1}\alpha AS = \alpha S^{-1}AS$ est triangulaire et ses éléments diagonaux sont $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_n$ donc $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$.

Q 16. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, et X un vecteur propre associé. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont la première colonne est égale à X et ses autres colonnes nulles. On a alors $AH = \lambda H$ donc $|\lambda|N(H) = N(AH) \leqslant N(A)N(H)$, et puisque $H \neq 0$, $|\lambda| \leqslant N(A)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\rho(A) \leqslant N(A)$.

III. B. 2)

Q 17. On a $[TD_\tau]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} T_{ik}D_{kj} = \tau^{j-1}T_{ij}$ puis $[D_\tau^{-1}TD_\tau]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D_\tau^{-1}]_{ik}[TD_\tau]_{kj} = \tau^{1-i}[TD_\tau]_{ij} = \tau^{j-i}T_{ij}$.

Q 18. On a donc $\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{j=1}^{n} \tau^{j-i}|T_{ij}|\Big) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} \tau^{j-i}|T_{ij}|\Big)$ car T est triangulaire supérieure.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{\tau\to 0}\Big(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} \tau^{j-i}|T_{ij}|\Big) = |T_{ii}|$ donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\tau \in]0, \delta[$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\Big(|T_{ii}| + \sum_{j=i+1}^{n} \tau^{j-i}|T_{ij}|\Big) \leqslant |T_{ii}| + \epsilon$, et donc $\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |T_{ii}| + \epsilon = \rho(T) + \epsilon$ puisque T est triangulaire.

Q 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; D'après la question 15, il existe T triangulaire supérieure et S inversible tel que $A = STS^{-1}$. D'après la question 14, $\rho(A) = \rho(T)$, et d'après la question 18, il existe $\tau > 0$ tel que $\|D_\tau^{-1}S^{-1}ASD_\tau\|_\infty \leqslant \rho(A) + \epsilon$. Posons $N(M) = \|D_\tau^{-1}S^{-1}MSD_\tau\|_\infty$; d'après les questions 11 et 13, N est une norme sous-multiplicative, qui vérifie $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon$.

Remarque. Cette partie avait pour but de prouver une des caractéristiques du rayon spectral : c'est la borne inférieure de N(A) pour N parcourant l'ensemble des normes sous-multiplicatives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III. B. 3)

Q 20. Supposons que $\lim A^k = 0$, et considérons $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, ainsi qu'un vecteur propre X. On a $A^k = \lambda^k X$ donc $\lim \lambda^k X = 0$, et puisque $X \neq 0$ ceci impose $|\lambda| < 1$. On a donc $\rho(A) < 1$.
Réciproquement, supposons $\rho(A) < 1$, et considérons $\epsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \epsilon < 1$, ainsi qu'une norme sous-multiplicative N telle que $N(A) \leqslant \rho(A) + \epsilon$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $N(A^k) \leqslant N(A)^k$ (récurrence immédiate car N est sous-multiplicative) donc $\lim N(A^k) = 0$, ce qui prouve que $\lim A^k = 0$; l'équivalence est prouvée.

IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

IV. A –

Q 21. A est symétrique réelle donc diagonalisable d'après le théorème spectral; qui plus est, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Q 22. Si $\rho(A) = 0$, toutes les valeurs prorpes de A sont nulles, et puisque A est diagonalisable, $A = 0$, ce qui n'est pas. On a donc $r = \rho(A) > 0$.

Q 23. Soit $(X_1,\ldots,X_n)$ une base orthonormée formée de vecteurs propres de A. Sans perte de généralité on peut poser $AX_k = \lambda_k X_k$ avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n = \mu$.
Posons $X = \sum_{k=1}^{n} x_k X_k$. Alors $X^T AX = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leqslant \mu \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \mu\|X\|^2 = \mu$.

Q 24. Soyons plus précis en supposant $\lambda_1 \leqslant \cdots \lambda_{j-1} < \lambda_j = \cdots = \lambda_n = \mu$. Il y a alors égalité dans la majoration précédente si et seulement si $\lambda_k < \mu \implies x_k = 0$, autrement dit si et seulement si $X \in \mathrm{Vect}(X_j,\ldots,X_n) = \mathrm{Ker}(A-\mu I_n)$, bref si X est vecteur propre de A pour la valeur propre μ.

Q 25. La majoration $|AB| \leqslant |A|\cdot|B|$ prouvée à la question 1 reste valable lorsque B est un vecteur colonne donc $|X^T AX| \leqslant |X|^T \cdot |A| \cdot |X| = |X|^T \cdot A \cdot |X|$ (car $A \geqslant 0$). $|X|$ est toujours unitaire donc d'après ce qui précède, $|X^T AX| \leqslant \mu$.

Q 26. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, et X un vecteur propre unitaire qui lui est associé. On a alors $X^T AX = \lambda$ donc d'après la question précédente, $|\lambda| \leqslant \mu$. On a donc $\mu \geqslant 0$ et $\max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| = \mu$, autrement dit $\mu = \rho(A) = r$.

IV. B –

Q 27. On a $X^T AX = r > 0$ donc d'après la question 25, $r = |X|^T A|X|$, et d'après la question 24, $|X|$ est vecteur propre pour la valeur propre r. De plus, d'après la question 1, $r|X| = A|X| > 0$, et puisque $r > 0$, $|X| > 0$.

Q 28. En prouvant que $|X| > 0$ nous avons montré que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $X_i \neq 0$. Supposons l'existence de $i \neq j$ tel que $X_i < 0 < X_j$. L'un des deux vecteurs $Y = X + |X|$ et $Z = X - |X|$ n'est pas nul (car $X \neq 0$) ; supposons par exemple que ce soit Z. Alors $\dfrac{Z}{\|Z\|}$ est un vecteur propre unitaire pour la valeur propre r. Mais $Z_j = 0$, donc c'est contradictoire avec ce que nous avons prouvé à la question précédente. Il en est de même si $Y \neq 0$ car alors $Y_i = 0$. On en déduit que tous les X_i sont de même signe, autrement dit que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.

Q 29. Supposons $\dim \mathrm{Ker}(A - rI_n) \geqslant 2.$, et considérons alors deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux X et Y. Quitte à remplacer X par $-X$ et/ou Y par $-Y$ on peut supposer $X > 0$ et $Y > 0$.
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(X - Y)$ est un vecteur propre unitaire donc tous ses coefficients sont de même signe. Quitte à permuter X et Y on suppose $X - Y > 0$. Ainsi, $X < Y$. Mais alors $\|X\| < \|Y\|$, ce qui est absurde, puisque ces deux vecteurs sont unitaires.
On en déduit que $\dim \mathrm{Ker}(A - rI_n) = 1$.

Q 30. A est diagonalisable car symétrique, donc la multiplicité d'une valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre correspondant ; r est donc de multiplicité égale à 1.
Supposons $-r$ valeur propre de A, et considérons un vecteur propre unitaire associé X. On a $X^T AX = -r$ donc d'après la question 25, $r \leqslant |X|^T A|X| \leqslant r$, soit $|X|^T A|X| = r$. Ceci prouve que $|X|$ est vecteur propre pour la valeur propre r.
On a donc $AX = -rX$ et $A|X| = r|X|$ donc pour tout $i \in [\![i,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}|X_j| = r|X_j|$ et $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j = -rX_i$. Ainsi, $\left|\sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_j\right| = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}|X_j|$ et d'après la question 4, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $A_{ij}X_j = e^{i\theta} A_{ij}|X_j|$ soit $X_j = e^{i\theta}|X_j|$ puisque $A > 0$. Mais ici les coefficients de X sont réels donc $e^{i\theta} = \pm 1$, soit $X = |X|$ ou $X = -|X|$, ce qui est absurde puisque $r \neq -r$.
On en déduit que $-r$ n'est pas valeur propre de A.

Q 31. Considérons la matrice $A = I_2$: elle est symétrique, positive, et $\mathrm{Sp}(I_2) = \{1\}$ donc $r = 1$ est valeur propre double.

IV. C –

Q 32. On a vu (question 15) que $\rho(A^p) = r^p$ et d'après la question 29, $\dim(A^p - r^p I_n) = 1$. Or $\mathrm{Ker}(A - rI_n) \subset \mathrm{Ker}(A^p - r^p I_n)$ donc $\dim \mathrm{Ker}(A - rI_n) = 1$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - rI_n) = \mathrm{Ker}(A^p - r^p I_n)$. Or ce dernier est d'après la question 28 engendré par un vecteur $X > 0$ donc c'est aussi le cas de $\mathrm{Ker}(A - rI_n)$.

Q 33. Supposons que $-r$ soit aussi valeur propre de A : il existe $Y \neq 0$ tel que $AY = -rY$. On a $A^p Y = (-r)^p Y$ donc si p est pair, $Y \in \mathrm{Ker}(A^p - r^p I_n) = \mathrm{Ker}(A - rI_n)$, ce qui est absurde.
Supposons maintenant p impair. Mais alors $A^{2p} = (A^p)^2 > 0$ et on est ramené au cas pair.
r est donc la seule valeur propre de A de module égal à r (rappelons qu'une matrice symétrique réelle a sons spectre inclus dans $\mathbb{R}$).

V Une application : le théorème de Ky Fan

Q 34. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, et X un vecteur propre ; on a $(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{X} = 0$, donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(\mathrm{A}_{ii}-\lambda)\mathrm{X}_i + \sum_{j\neq i} \mathrm{A}_{ij}\mathrm{X}_j = 0$, ce qui implique $|\mathrm{A}_{ii}-\lambda|\cdot|\mathrm{X}_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |\mathrm{A}_{ij}|\cdot|\mathrm{X}_j|$. Considérons alors un entier i pour lequel $|\mathrm{X}_i|$ est maximal.
Alors $|\mathrm{A}_{ii}-\lambda|\cdot|\mathrm{X}_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |\mathrm{A}_{ij}|\cdot|\mathrm{X}_i|$ et puisque $\mathrm{X}\neq 0$, $|\mathrm{A}_{ii}-\lambda| \leqslant \sum_{j\neq i}|\mathrm{A}_{ij}|$.

Q 35. Suivons l'indication en considérant un vecteur propre $\mathrm{X} > 0$ de B pour $\rho(\mathrm{B})$, et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)$.
On a $(\mathrm{D}^{-1}\mathrm{AD})_{ij} = \dfrac{\mathrm{X}_j}{\mathrm{X}_i}\mathrm{A}_{ij}$. Les matrices A et $\mathrm{D}^{-1}\mathrm{AD}$ ont même spectre donc d'après la question 34,

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |z-\mathrm{A}_{ii}| \leqslant \sum_{j\neq i} \frac{\mathrm{X}_j}{\mathrm{X}_i}|\mathrm{A}_{ij}| \right\}$$

On a $\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{\mathrm{X}_j}{\mathrm{X}_i}|\mathrm{A}_{ij}| \leqslant \frac{1}{\mathrm{X}_i}\sum_{j\neq i}\mathrm{B}_{ij}\mathrm{X}_j = \frac{1}{\mathrm{X}_i}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{B}_{ij}\mathrm{X}_j - \mathrm{B}_{ii}\mathrm{X}_i\right)$.
Mais $\mathrm{BX} = \rho(\mathrm{B})\mathrm{X}$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathrm{B}_{ij}\mathrm{X}_j = \rho(\mathrm{B})\mathrm{X}_i$, et ainsi, $\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{\mathrm{X}_j}{\mathrm{X}_i}|\mathrm{A}_{ij}| \leqslant \rho(\mathrm{B}) - \mathrm{B}_{ii}$. On a donc :

$$\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; |z-\mathrm{A}_{ii}| \leqslant \rho(\mathrm{B}) - \mathrm{B}_{ii} \right\}$$