Corrigé : nombres de Catalan (Centrale PC 2021)

I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

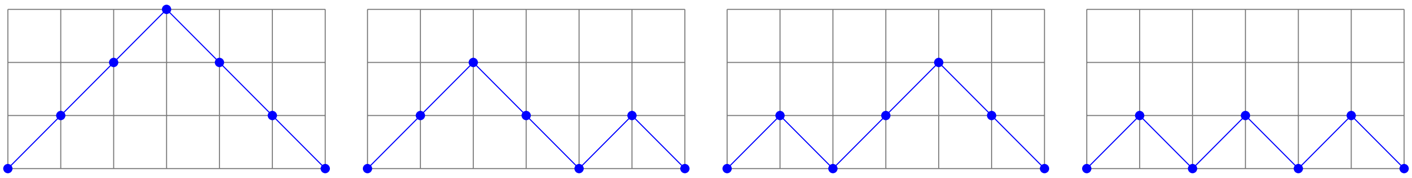
I. A – Espérance et variance de S_n

Q 1. Posons $Z_k = \begin{cases} 1 & \text{si } X_k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ donc $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$: Y_n suit une loi binomiale de paramètre (n,p). On en déduit que $\mathbb{E}(Y_n) = np$ et $\mathbb{V}(Y_n) = np(1-p)$.

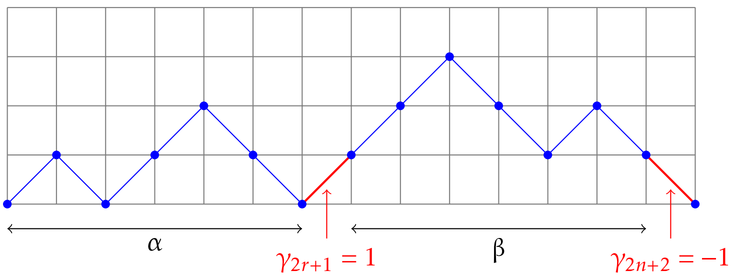
Q 2. On a $X_k = 2Z_k - 1$ donc $S_n = 2Y_n - n$. On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(Y_n) - n = (2p-1)n$ et $\mathbb{V}(S_n) = 2\mathbb{V}(Y_n) = 2np(1-p)$. On a $X_k \equiv 1 \bmod 2$ donc $S_n \equiv n \bmod 2$. Ainsi, S_n et n ont même parité.

I. B – Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Q 3. On a C3 = 4 :



Q 4. On a $s_\gamma(2r) = 0$ et $s_\gamma(2r+1) = s_\gamma(2r) + \gamma_{2r+1} \geqslant 0$ donc $\gamma_{2r+1} = 1$.
On a $s_\gamma(2n+1) \geqslant 0$ et $s_\gamma(2n+2) = s_\gamma(2n+1) + \gamma_{2n+2} = 0$ donc $\gamma_{2n+2} = -1$.



Pour tout $k \in [\![0, 2r]\!]$, $s_\alpha(k) = s_\gamma(k) \geqslant 0$ et $s_\alpha(2r) = s_\gamma(2r) = 0$ donc α est un mot de Dick.
Par définition de r on a pour tout $k \in [\![r+1, n]\!]$, $s_\gamma(2k) \geqslant 1$ et $s_\gamma(2k+1) \geqslant 1$ (c'est une somme impaire non nulle) donc β est un mot de Dick.

Q 5. Par indépendance des (X_n) on a $\mathbb{P}(A_{t,\gamma}) = \prod_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(X_{t+k} = \gamma_k)$.

Or $\operatorname{card}\{k \in [\![1, 2n]\!] \mid \gamma_k = 1\} = \operatorname{card}\{k \in [\![1, 2n]\!] \mid \gamma_k = -1\} = n$ (car γ est un chemin de Dick) donc $\mathbb{P}(A_{t,\gamma}) = p^n(1-p)^n$.

Q 6. S_k a même parité que k (question 2) donc si $T = k \in \mathbb{N}^*$ alors k est pair.

Raisonnons par équivalence :

$$[T = 2n+2 \mid X_1 = 1] \iff \text{il existe un chemin de Dick } \gamma \text{ de longueur } 2n \text{ tel que } A_{1,\gamma} \text{ est réalisé et } X_{2n+2} = -1$$

Sachant qu'il y a C_n chemins de Dick de longueur $2n$, la question 5 donne : $\mathbb{P}(T = 2n+2 \mid X_1 = 1) = C_n p^n (1-p)^{n+1}$.
Pour des raisons symétriques, $\mathbb{P}(T = 2n+2 \mid X_1 = -1) = C_n p^{n+1}(1-p)^n$.
$(X_1 = 1, X_1 = -1)$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(T = 2n+2) = 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$$

I. B. 1) Série génératrice des nombres de Catalan

Q 7. Si $0 < r < n$ un mot de Dick s'écrit de manière unique sous la forme $\gamma = (\alpha, 1, \beta, -1)$ où α est un mot de Dick de longueur $2r$ et β un mot de Dick de longueur $2(n-r)$.
Si $r = 0$ un mot de Dick s'écrit de manière unique sous la forme $\gamma = (1, \beta, -1)$ où β est un mot de Dick de longueur $2n$.
Si $r = n$ un mot de Dick s'écrit de manière unique sous la forme $\gamma = (\alpha, 1, -1)$ où α est un mot de Dick de longueur $2n$.

On en déduit que $C_{n+1} = C_n + \sum_{r=1}^{n-1} C_r C_{n-r} + C_n = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}$ sachant que $C_0 = 1$.

Q 8. Les événements $[\mathrm{T} = 2n+2]$, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux incompatibles donc la série $\sum_n \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2n+2)$ converge, et ce quel que soit $p \in]0,1[$. En particulier, pour $p = 1/2$ la question 6 montre que la série $\sum \frac{\mathrm{C}_n}{4^n}$ converge.

Q 9. Pour tout $t \in [1/4, 1/4]$, $|\mathrm{C}_n t^n| \leqslant \frac{\mathrm{C}_n}{4^n}$ donc d'après la question précédente, la série $\sum \mathrm{C}_n t^n$ est normalement convergente sur $[-1/4, 1/4]$.

Q 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{T} = 2n+1) = 0$ d'après la question 6 donc pour tout $t \in [-1,1]$,

$$\mathrm{G_T}(t) = \mathbb{P}(\mathrm{T}=0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{T} = 2n+2) t^{2n+2} = \mathbb{P}(\mathrm{T}=0) + 2p(1-p)t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_n p^n (1-p)^n t^{2n} = \mathbb{P}(\mathrm{T}=0) + g\big(p(1-p)t^2\big)$$

Q 11. T admet une espérance si et seulement si $\mathrm{G_T}$ est dérivable en 1. D'après la question précédente cela revient à montrer que la fonction g, et donc f, est dérivable en $p(1-p)$. Or f est la somme d'une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1/4 (question 8) donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1/4, 1/4[$. Il reste à observer que si $p \neq 1/2$ alors $p(1-p) < 1/4$ pour en conclure que T admet une espérance.

Q 12. Pour tout $t \in \mathrm{I}$ la convergence de la série définissant $f(t)$ est absolue (question 9) donc on peut réaliser un produit de Cauchy :

$$g(t)^2 = 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_k \mathrm{C}_{n-k} t^n = 4t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{n+1} t^n = 4t\big(f(t) - \mathrm{C}_0\big) = 2g(t) - 4t$$

Q 13. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, les racines du polynôme $\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} + 4t$ sont $1 \pm \sqrt{1-4t}$ donc pour tout $t \in \mathrm{I}$ il existe $\epsilon(t) \in \{-1,1\}$ tel que $g(t) = 1 + \epsilon(t)\sqrt{1-4t}$.

Q 14. D'après la question 9 la fonction f (et donc g) est continue sur $[-1/4, 1/4]$ (convergence normale donc uniforme d'une série de fonctions continues) donc $\epsilon : t \mapsto \frac{g(t)-1}{\sqrt{1-4t}}$ est continue sur $\mathrm{I} \setminus \{1/4\}$.
Une fonction continue à valeurs dans $\{-1,1\}$ est nécessairement constante. Sachant que $g(0) = 0$ on en déduit que pour tout $t \in \mathrm{I} \setminus \{1/4\}$, $g(t) = 1 - \sqrt{1-4t}$, égalité qui se prolonge pour $t = 1/4$ car g est continue sur I.

Q 15. Ainsi, pour tout $t \in [-1,1]$, $\mathrm{G_T}(t) = \mathbb{P}(\mathrm{T}=0) + 1 - \sqrt{1-4p(1-p)t^2}$. Et sachant que $\mathrm{G_T}(1) = 1$, $\mathbb{P}(\mathrm{T}=0) = \sqrt{1-4p(1-p)}$. On en déduit que $\mathbb{P}(\mathrm{T} \neq 0) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$.
En particulier, si $p = 1/2$ alors $\mathbb{P}(\mathrm{T} \neq 0) = 1$: le retour à l'origine est quasi-certain.

Q 16. Lorsque $p = 1/2$, $\mathrm{G_T}(t) = \mathbb{P}(\mathrm{T}=0) + g(t^2/4) = 1 - \sqrt{1-t^2}$. Cette fonction n'est pas dérivable en 1, donc T n'admet pas d'espérance lorsque $p = 1/2$.

I. C – Expression des nombres de Catalan et équivalent

Q 17. La fonction $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ possède un développement en série entière sur $]-1,1[$, ce qui justifie l'existence de la suite (a_n), avec

$$a_n = \frac{1/2(1/2-1)\cdots(1/2-n)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{(2n-1)\cdots(3)(1)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2.4^n n!(n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2.4^n(n+1)} \binom{2n}{n}$$

Q 18. Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $g(t) = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (4t)^{n+1} = 2t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} t^n$ donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} t^n$. Par unicité du développement en série entière on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{C}_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Q 19. On a $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \mathrm{e}^{-n}$ donc $\mathrm{C}_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}$.

Q 20. On a $(2n+2)\mathbb{P}(\mathrm{T} = 2n+2) = 4(n+1)\mathrm{C}_n \lambda^{n+1} \sim \frac{(4\lambda)^{n+1}}{\sqrt{n\pi}}$ avec $\lambda = p(1-p)$.

La série $\sum \frac{(4\lambda)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ converge absolument si et seulement si $|4\lambda| < 1$ soit $p \neq 1/2$, donc $\sum n\mathbb{P}(\mathrm{T} = n)$ converge (absolument) si et seulement si $p \neq 1/2$ (T ne prend que des valeurs paires), ce qui re-démontre le résultat des questions 11 et 16.

II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

II. A – Définition et propriétés d'un système orthogonal

Q 21. $(V_0, \dots, V_n)$ est orthogonale et échelonnée en degré donc est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 22. Si $\deg P < n$ alors $P \in \mathrm{Vect}(V_0, \dots, V_{n-1})$ donc $\langle V_n \mid P \rangle = 0$.

Q 23. Si $n = 0$ on a nécessairement $W_0 = 1 = V_0$.
Supposons maintenant $n > 0$ et considérons la décomposition de W_n dans la base $(V_0, \dots, V_n)$: $W_n = \sum_{k=0}^{n} a_k V_k$.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $\langle W_n \mid V_k \rangle = 0$ d'après la question 22. Mais $\langle W_n \mid V_k \rangle = a_k \|V_k\|^2$ car (Vn) est une famille orthogonale donc $a_k = 0$. Ainsi, $W_n = a_n V_n$, et s'agissant de deux polynômes unitaires, $a_n = 1$. On a donc bien $W_n = V_n$.

II. B – Expression de $\deg \mathbf{G}_n$ *à l'aide de la suite* $(\mathbf{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Q 24. La famille (V_n) est échelonnée en degré donc Q_n est triangulaire supérieure, et chaque V_k est unitaire donc les termes diagonaux sont égaux à 1. On en déduit que $\det Q_n = 1$.

Q 25. Le coefficient de rang (i, j) du produit $Q_n^T G_n Q_n$ vaut :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\ell=1}^{n+1} q_{k,i} q_{\ell,j} \langle X^{k-1} \mid X^{\ell-1} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n+1} q_{k,i} X^{k-1} \,\middle|\, \sum_{\ell=1}^{n+1} q_{\ell,j} X^{\ell-1} \right\rangle = \langle V_i \mid V_j \rangle$$

donc $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$.

Q 26. Puisque $\det Q_n = 1$ on a $\det G_n = \det G'_n$. Et puisque (V_n) est orthogonale la matrice G'_n est diagonale et ainsi $\det G_n = \det G'_n = \prod_{i=0}^{n} \|V_i\|^2$.

III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

III. A – Produit scalaire

Q 27. Soit $f : x \mapsto P(4x)Q(4x)\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$. Au voisinage de 0, $f(x) \underset{0}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ donc f aussi.

Q 28. La question précédente assure que ce produit scalaire est bien défini pour tout couple de polynômes (P, Q).
La bilinéarité résulte de la linéarité de l'intégrale; la symétrie est évidente et la positivité résulte de la positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle P \mid P \rangle = 0$, la fonction $x \mapsto P(4x)^2 \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$ étant positive et continue on a pour tout $x \in]0, 1]$, $P(4x) = 0$ et P possède une infinité de racines donc est le polynôme nul.
On déduit de tout ceci que l'on a bien défini un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III. B – Système orthogonal

Q 29. Montrons par récurrence sur n que U_n est unitaire, de degré n et que $U_n(0) = (-1)^n$.

- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis aux rangs n et $n+1$. On a $\deg(X-2)U_{n+1} = n+2$ et $\deg U_n = n$ donc $\deg U_{n+2} = n+2$. U_{n+1} est unitaire donc $(X-2)U_{n+1}$ aussi, et par suite U_{n+2} est unitaire. Enfin, $U_{n+2}(0) = -2U_{n+1}(0) - U_n(0) = -2(-1)^{n+1} - (-1)^n = (-1)^{n+2}$ donc la récurrence se propage.

Q 30. Montrons la formule demandée par récurrence sur n.

- Si $n = 0$ on a $U_0(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin\theta$.
- Si $n = 1$ on a $U_1(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$ et

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta)\cos\theta + \sin\theta\cos(2\theta) = 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta(2\cos^2\theta - 1) = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$$

  donc $U_1(4\cos^2\theta)\sin\theta = \sin(3\theta)$.

– Si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis aux rangs n et $n+1$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_{n+2}(4\cos^2\theta)\sin\theta &= 2(2\cos^2\theta-1)\mathrm{U}_{n+1}(4\cos^2\theta)\sin\theta-\mathrm{U}_n(4\cos^2\theta)\sin\theta\\ &= 2\cos(2\theta)\sin((2n+3)\theta)-\sin((2n+1)\theta)\\ &= \sin((2n+3)\theta+2\theta)+\sin((2n+3)\theta-2\theta)-\sin((2n+1)\theta)=\sin((2n+5)\theta)\end{aligned}$$

donc la récurrence se propage.

Q 31. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big(\cos(2(m-n)\theta)-\cos(2(m+n+1)\theta)\Big)\mathrm{d}\theta.$

Si $k\in\mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(2k\theta)\,\mathrm{d}\theta=0$ donc $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\pi/4 & \text{si } m=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Q 32. Le changement de variable $x=\cos^2\theta$ donne :

$$\langle \mathrm{U}_m \mid \mathrm{U}_n\rangle=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\mathrm{U}_m(4\cos^2\theta)\mathrm{U}_n(4\cos^2\theta)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin((2m+1)\theta)\sin(2n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}1 & \text{si } m=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

donc la famille (U_n) est orthonormée. Compte tenu de la question 29 c'est un système orthogonal.

III. C – Application

Q 33. On a $\displaystyle 4\mu_{n-1}-\mu_n=\langle 4\mathrm{X}^{n-1}-\mathrm{X}^n\mid 1\rangle=\frac{2}{\pi}\int_0^1\Big(4(4x)^{n-1}-(4x)^n\Big)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{2\times 4^n}{\pi}\int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$

Considérons l'intégration par parties suivante : $\begin{array}{c|cc|}+ & (1-x)^{3/2} & x^{n-3/2}\\ - & -\dfrac{3}{2}(1-x)^{1/2} & \dfrac{1}{n-1/2}x^{n-1/2}\end{array}$. Le terme intégré possède une limite finie en 0 car $n\geqslant 1$ donc cette intégration par parties est licite et donne :

$$4\mu_{n-1}-\mu_n=\frac{2\times 4^n}{\pi}\left(\left[\frac{(1-x)^{3/2}x^{n-1/2}}{n-3/2}\right]_0^1+\frac{3}{2n-1}\int_0^1(1-x)^{1/2}x^{n-1/2}\,\mathrm{d}x\right)=\frac{3}{2n-1}\frac{2}{\pi}\int_0^1(4x)^n\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2n-1}\mu_n$$

Q 34. On a donc $\mu_0=\langle 1\mid 1\rangle=\|\mathrm{U}_0\|^2=1$ et pour tout $n\geqslant 1$, $\mu_n=\dfrac{2(2n-1)}{n+1}\mu_{n-1}$.
Or $\mathrm{C}_0=1$ et $\dfrac{2(2n-1)}{n+1}\mathrm{C}_{n-1}=\dfrac{2(2n-1)(2n-2)!}{n(n+1)((n-1)!)^2}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)(n!)^2}=\mathrm{C}_n$ donc les suites (μ_n) et (C_n) vérifient la même condition initiale et la même relation de récurrence donc sont égales.

Q 35. $\displaystyle \mathrm{C}_{i+j-2}=\langle \mathrm{X}^{i+j-2}\mid 1\rangle=\frac{2}{\pi}\int_0^1(4x)^{i+j-2}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\langle \mathrm{X}^{i-1}\mid \mathrm{X}^{j-1}\rangle$ donc $\mathrm{H}_n=\det(\mathrm{G}_n)$ avec les notations de la partie II.

Toujours d'après cette partie on a $\displaystyle \mathrm{H}_n=\prod_{i=0}^n\|\mathrm{U}_i\|^2$ donc $\mathrm{H}_n=1$ d'après la question 32.

III. D – Un autre déterminant de Hankel

Q 36. Le développement de $\mathrm{D}_n(\mathrm{X})$ suivant sa dernière ligne montre qu'il s'agit d'un polynôme. Le coefficient devant X^n est égal à 1 d'après la question précédente donc $\mathrm{D}_n(\mathrm{X})$ est un polynôme unitaire de degré n.

Par linéarité on a $\langle \mathrm{D}_n\mid \mathrm{X}^k\rangle=\begin{vmatrix}\mathrm{C}_0 & \cdots & \cdots & \mathrm{C}_n\\ \vdots & & & \vdots\\ \mathrm{C}_{n-1} & \cdots & \cdots & \mathrm{C}_{2n-1}\\ \langle 1\mid \mathrm{X}^k\rangle & \cdots & \cdots & \langle \mathrm{X}^n\mid \mathrm{X}^k\rangle\end{vmatrix}$. On constate alors que si $k<n$ les lignes $k+1$ et $n+1$ de ce déterminant sont identiques : en effet, $\mathrm{C}_{k+j}=\langle \mathrm{X}^j\mid \mathrm{X}^k\rangle$ (question 35). Ainsi, $\langle \mathrm{D}_n\mid \mathrm{X}^k\rangle=0$ pour $k<n$.

Q 37. La question 23 a montré l'unicité du système orthogonal; on a donc $\mathrm{D}_n=\mathrm{U}_n$ (il est unitaire, de degré n et orthogonal à tous les U_k pour $k<n$).
Par ailleurs, le développement de D_n suivant la dernière ligne montre que $(-1)^{n+2}\mathrm{H}'_n$ est le coefficient constant de D_n donc $\mathrm{H}'_n=(-1)^n\mathrm{D}_n(0)=(-1)^n\mathrm{U}_n(0)=1$ d'après la question 29.