Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (d'après Centrale PC 2019)

Durée : 4 heures

Remarque. L'énoncé initial comportait une partie supplémentaire consacrée à l'algèbre bilinéaire.

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$.

On note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base $\mathcal{B}$ de E, de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

On dit qu'un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, stable pour la composition, c'est-à-dire que $u \circ v$ appartient à $\mathcal{A}$ quels que soient les éléments u et v de $\mathcal{A}$.
(Remarquer qu'on ne demande pas que Id_{E} appartienne à $\mathcal{A}$).

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est *commutative* si pour tous u et v dans $\mathcal{A}$, $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de $\mathcal{A}$.

On dit qu'une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{A}$, AB = BA. Une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $\mathcal{A}$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si $\mathcal{B}$ est une base de E, l'application $\mathrm{M}at_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(\mathrm{E}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E.

On désigne par $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué des matrices triangulaires supérieures (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I Exemples de sous-algèbres

I. A – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Q 1. Les sous-ensembles $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Q 2. Les sous-ensembles $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$?

Q 3. On suppose $n \geqslant 3$. Les sous-ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

I. B – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F, c'est-à-dire $\mathcal{A}_{\mathrm{F}} = \left\{u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \,\middle|\, u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}\right\}$.

Q 4. Montrer que $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Q 5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_{\mathrm{F}} = n^2 - pn + p^2$.
On pourra considérer une base de E *dans laquelle la matrice de tout élément de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ est triangulaire par blocs.*

Q 6. Déterminer $\max\limits_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Q 7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 2$. Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geqslant j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

II. A – Calcul des puissances de J

Q 10. Préciser les matrices J et J^2. (on pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n \geqslant 2$).

Q 11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

Q 12. Quel est le lien entre la matrice $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k, où $0 \leqslant k \leqslant n-1$?

II. B – Une base de $\mathcal{A}$

Q 13. Montrer que $(\mathrm{I}_n, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2, \dots, \mathrm{J}^{n-1})$ est une base de $\mathcal{A}$.

Q 14. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.

Q 15. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. C – Diagonalisation de J

Q 16. Déterminer le polynôme caractéristique de J.

Q 17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q 19. Déterminer les valeurs propres complexes de J est les espaces propres associés.

II. D – Diagonalisation de $\mathcal{A}$

Q 20. Le sous-ensemble $\mathcal{A}$ est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Q 21. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, la matrice $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.

Q 22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$?

III Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ constituée d'endomorphismes nilpotents. On admet dans cette partie le théorème ci-dessous, qui sera démontré dans la partie IV.

Théorème (Théorème de Burnside) — *Soit* E *un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Si les seuls sous-espaces vectoriels de* E *stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et* E*, alors $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.*

On se propose de démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents, alors $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q 23. Montrer que le résultat est vrai si $n = 1$.

On suppose désormais que $n \geqslant 2$ et que le résultat est vrai pour tout entier naturel $d \leqslant n-1$.

Q 24. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

On fixe dans la suite un tel sous-espace vectoriel et on note r sa dimension. Soit aussi $s = n - r$.

Q 25. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ \mathrm{O} & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{A}(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $\mathrm{B}(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D}(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.

Q 26. Montrer que $\left\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\right\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes et que $\left\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\right\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

Q 27. Montrer que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q 28. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices des éléments de $\mathcal{A}$ appartiennent à $\mathrm{T}_n^{+}(\mathbb{C})$.

IV Le théorème de Burnside

On se propose de démontrer dans cette partie le théorème de Burnside énoncé dans la partie III.

On fixe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geqslant 2$.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ est irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont $\{0\}$ et E.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il s'agit donc de montrer que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

IV.A – Recherche d'un élément de rang 1

Q 29. Soient x et y deux éléments de E, x étant non nul. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$. *On pourra considérer dans* E *le sous-espace vectoriel* $\left\{u(x) \mid u \in \mathcal{A}\right\}$.

Q 30. Soit $v \in \mathcal{A}$ de rang supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que :

$$0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v)$$

Considérer x et y dans E *tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre, justifier l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u \circ v(x) = y$ et considérer l'endomorphisme induit par $v \circ u$ sur* $\mathrm{Im}(v)$.

Q 31. En déduire l'existence d'un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

IV.B – Conclusion

Soit $u_0 \in \mathcal{A}$ de rang 1. On peut donc choisir une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E telle que $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u_0$.

Q 32. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{A}$ de rang 1 tels que $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Q 33. Conclure.

♦ ♦
♦