Corrigé : réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ (d'après Centrale PC 2019)

I Exemple de sous-algèbres

I. A – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Q 1. Soit A et B dans $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$: on a $i > j \implies \mathrm{A}_{ij} = \mathrm{B}_{ij} = 0$.
La matrice nulle appartient à $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $i > j \implies (\lambda \mathrm{A}_{ij} + \mathrm{B}_{ij}) = 0$ donc $\lambda\mathrm{A} + \mathrm{B} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$. Ainsi, $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $i > j$. Alors $k < i \implies \mathrm{A}_{ik} = 0$ et $k > j \implies \mathrm{B}_{kj} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}_{ik}\mathrm{B}_{kj} = 0$ et $\mathrm{AB} \in \mathrm{T}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il en est de même de $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$, en remplaçant les inégalités $i > j$ par $i \geqslant j$ dans le raisonnement ci-dessus.

Q 2. $\mathrm{S}_2(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_2(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{S}_2(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{A}_2(\mathbb{K}).$$

Q 3. De même, $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres : il suffit de généraliser les contre-exemples (A, B) de la question précédente en considérant les matrices $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{B} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I. B – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$

Q 4. L'endomorphisme nul appartient à $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, et si $(u, v) \in \mathcal{A}_\mathrm{F}^2$, on a :

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad (\lambda u + v)(x) = \lambda u(x) + v(x) \in \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad u \circ v(x) \in \mathrm{F}$$

donc $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Q 5. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, complétée pour former une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Alors $u \in \mathcal{A}_\mathrm{F} \iff \mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{D} \end{array}\right)$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. On en déduit que $\dim \mathcal{A}_\mathrm{F} = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - np + p^2$.

Q 6. Étudions la fonction $f : x \mapsto n^2 - nx + x^2$ sur $[1, n-1]$. On a $f'(x) = 2x - n$ donc f est décroissante sur $[1, n/2]$ et croissante sur $[n/2, n-1]$. On en déduit que $\displaystyle\max_{1 \leqslant p \leqslant n-1} (n^2 - np + p^2) = \max(f(1), f(n-1)) = n^2 - n + 1$.

I. C – Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Q 7. $\Gamma(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ avec $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
De plus, $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}$ donc $(a\mathrm{I} + b\mathrm{J})(a'\mathrm{I} + b'\mathrm{J}) = (aa' - bb')\mathrm{I} + (ab' + a'b)\mathrm{J} \in \Gamma(\mathbb{K})$, et $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8. $\chi_\mathrm{J}(x) = x^2 + 1$ donc $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{J}) = \varnothing$ et J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A fortiori, $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable.

Q 9. En revanche, $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{J}) = \{-i, i\}$ donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (le polynôme caractéristique est scindé à racines simples), et toute base qui diagonalise J diagonalise aussi $a\mathrm{I} + b\mathrm{J}$ donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II. A – Calcul des puissances de J

Q 10. On a $\mathrm{J} = \mathrm{J}(0, 1, 0, \dots, 0)$. De plus, J^2 est la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme φ^2 qui est défini par $\varphi(e_j) = e_{j+2}$ si $j \leqslant n-2$, $\varphi(e_{n-1}) = e_1$ et $\varphi(e_n) = e_2$ donc $\mathrm{J}^2 = \mathrm{J}(0, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Q 11. On a $\varphi^n = \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{J}^n = \mathrm{I} = \mathrm{J}(1, 0, \dots, 0)$ et par un raisonnement analogue à celui tenu à la question précédente, $\mathrm{J}^k = \mathrm{J}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1-k})$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Q 12. On a $\displaystyle \mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}^k$.

II. B – *Une base de $\mathcal{A}$*

Q 13. De la question 12 il résulte immédiatement que $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}, \mathrm{J}, \dots, \mathrm{J}^{n-1})$, et cette famille est bien libre puisque $\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0 \iff a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Q 14. $\mathrm{MJ} = \mathrm{JM} \implies \forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{MJ}^k = \mathrm{J}^k\mathrm{M}$ (preuve élémentaire par récurrence) donc si M commute avec J, par linéarité M commute avec tout élément de $\mathcal{A}$ d'après la question précédente. La réciproque est évidente puisque $\mathrm{J} \in \mathcal{A}$.

Q 15. Soit $\mathrm{A} = \mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})$ et $\mathrm{B} = \mathrm{J}(b_0, \dots, b_{n-1})$ dans $\mathcal{A}$. Alors $\mathrm{AB} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i b_j \mathrm{J}^{i+j} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i b_j \mathrm{J}^{i+j \bmod n}$ puisque $\mathrm{J}^n = \mathrm{I}$, donc $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} \in \mathcal{A}$. On en déduit que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II. C – *Diagonalisation de J*

Q 16. Un développement par rapport à la dernière colonne fournit $\chi_{\mathrm{J}}(x) = x^n - 1$.

Q 17. Ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 18. Si $n = 2$, $\chi_{\mathrm{J}}(x) = (x-1)(x+1)$ est scindé à racines simples donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; en revanche si $n \geqslant 3$ ce polynôme n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, donc J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 19. $\mathrm{Sp}(\mathrm{J}) = \left\{\omega^k \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$ avec $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{J} - \omega^k\mathrm{I}) = \mathrm{Vect}(\omega^{(n-1)k}, \omega^{(n-2)k}, \dots, \omega^k, 1)$.

II. D – *Diagonalisation de $\mathcal{A}$*

Q 20. $\mathcal{A}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car ce n'en est pas un sous-espace vectoriel : la matrice $i\mathrm{J}$ (avec $i^2 = -1$) n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

Q 21. D'après la question 17, il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{JP}$ est diagonale. Si $\mathrm{A} = \mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathcal{A}$, on a vu que $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{J}^k$ donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{D}^k$ est une matrice diagonale.

Q 22. Avec les notations de la question précédente, $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ donc $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{diag}(\mathrm{Q}(1), \mathrm{Q}(\omega), \dots, \mathrm{Q}(\omega^{n-1}))$ et ainsi, $\mathrm{Sp}\big(\mathrm{J}(a_0, \dots, a_{n-1})\big) = \left\{\mathrm{Q}(\omega^k) \mid k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

III Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Q 23. Si $n = 1$, toute matrice 1×1 est triangulaire donc le résultat est vrai pour $n = 1$.

Q 24. Supposons que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ soient $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E. D'après le théorème de Burnside, on aurait $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Or Id_{E} n'est pas nilpotent, donc on ne peut avoir $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On en déduit qu'il existe un sous-espace vectoriel V distinct de $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E, stable par tout endomorphisme de $\mathcal{A}$.

Q 25. Soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à V. Pour tout $u \in \mathcal{A}$ V est stable par u, ce qui se traduit par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u) & \mathrm{B}(u) \\ \mathrm{O} & \mathrm{D}(u) \end{pmatrix}$.

Q 26. $u = 0 \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(0) = 0$ donc $\mathrm{A}(0) = 0$ et $\mathrm{D}(0) = 0$.

Soient u et v dans $\mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\lambda u + v \in \mathcal{A}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \begin{pmatrix} \lambda\mathrm{A}(u) + \mathrm{A}(v) & \lambda\mathrm{B}(u) + \mathrm{B}(v) \\ \mathrm{O} & \lambda\mathrm{D}(u) + \mathrm{D}(v) \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{A}(\lambda u + v) = \lambda\mathrm{A}(u) + \mathrm{A}(v)$ et $\mathrm{D}(\lambda u + v) = \mathrm{D}(u) + \lambda\mathrm{D}(v)$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(uv) = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(u)\mathrm{A}(v) & \mathrm{A}(u)\mathrm{B}'v) + \mathrm{B}(u)\mathrm{D}(v) \\ \mathrm{O} & \mathrm{D}(u)\mathrm{D}(v) \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{A}(uv) = \mathrm{A}(u)\mathrm{A}(v)$ et $\mathrm{D}(uv) = \mathrm{D}(u)\mathrm{D}(v)$.

Ces propriétés permettent alors de prouver sans peine que $\left\{\mathrm{A}(u) \mid u \in \mathcal{A}\right\}$ et $\left\{\mathrm{D}(u) \mid u \in \mathcal{A}\right\}$ sont des sous-algèbres, respectivement de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$. Elles établissent en outre que $\mathrm{A}(u)^n = \mathrm{A}(u^n) = \mathrm{A}(0) = 0$ et $\mathrm{D}(u)^n = \mathrm{D}(u^n) = \mathrm{D}(0) = 0$ donc leurs éléments sont nilpotents.

Q 27. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à chacune de ces deux sous-algèbres : elles sont trigonalisables. Ceci se traduit par l'existence de deux matrices inversibles $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_r(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Q} \in \mathcal{GL}_s(\mathbb{C})$ telles que pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}(u)\mathrm{P}$ et $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{D}(u)\mathrm{Q}$ sont triangulaires.

Posons $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{Q} \end{pmatrix}$. R est inversible, d'inverse $\mathrm{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{Q}^{-1} \end{pmatrix}$, et $\mathrm{R}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}(u)\mathrm{P} & \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}(u)\mathrm{Q} \\ \mathrm{O} & \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{D}(u)\mathrm{Q} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est trigonalisable.

Q 28. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents donc la matrice ci-dessus est nilpotente. Étant triangulaire ses éléments diagonaux sont ses valeurs propres. Or un endomorphisme nilpotent n'accepte que 0 comme valeur propre, donc sa diagonale est nulle : elle appartient à $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$.

IV Le théorème de Burnside

IV. A – Recherche d'un élément de rang 1

Q 29. Posons $\mathrm{V} = \left\{u(x) \,\middle|\, u \in \mathcal{A}\right\}$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E (c'est élémentaire) et pour tout $v \in \mathcal{A}$, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $v\big(u(x)\big) = v \circ u(x) \in \mathrm{V}$ car $v \circ u \in \mathcal{A}$. Ceci montre que V est stable par v, et donc par $\mathcal{A}$. Mais $\mathcal{A}$ est irréductible, donc $\mathrm{V} = \{0_\mathrm{E}\}$ ou $\mathrm{V} = \mathrm{E}$. Si on avait $\mathrm{V} = \{0_\mathrm{E}\}$ alors $\mathcal{A} = \{0\}$ puisque $x \neq 0_\mathrm{E}$. Mais $\{0\}$ n'est pas irréductible (tout sous-espace est stable par l'endomorphisme nul) donc $\mathrm{V} = \mathrm{E}$, et par conséquent pour tout $y \in \mathrm{E}$ il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$.

Q 30. Suivons l'indication : $\operatorname{rg} v \geqslant 2$ donc il existe $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ tel que la famille $\big(v(x), v(y)\big)$ soit libre.

Puisque $v(x) \neq 0_\mathrm{E}$, la question 29 prouve l'existence de $u \in \mathcal{A}$ tel que $u\big(v(x)\big) = y$.

Considérons maintenant la restriction $w : \left(\begin{array}{rcl} \operatorname{Im} v & \longrightarrow & \operatorname{Im} v \\ z & \longmapsto & v \circ u(z) \end{array}\right)$. Il s'agit d'un endomorphisme de $\operatorname{Im} v$, qui possède donc au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ (car le corps de base est $\mathbb{C}$). On a donc $\operatorname{rg}(w - \lambda \mathrm{Id}) < \operatorname{rg} v$.
Mais $\operatorname{Im}(w - \lambda \mathrm{Id}) = \operatorname{Im}(v \circ u \circ v - \lambda v)$ donc $\operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \operatorname{rg} v$.
Enfin, $(v \circ u \circ v - \lambda v)(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$ car la famille $\big(v(x), v(y)\big)$ est libre, donc $\operatorname{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) > 0$.

Q 31. Considérons $r = \min\left\{\operatorname{rg}(v) \,\middle|\, v \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\right\}$. Cet entier est bien défini car, on l'a déjà dit plus haut, $\mathrm{A} \neq \{0\}$.
Puisque $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre, si u et v sont dans $\mathcal{A}$ alors $v \circ u \circ v - \lambda v$ aussi. La question précédente montre donc qu'on ne peut avoir $r \geqslant 2$. On a donc $r = 1$, et il existe donc un élément de rang 1 dans $\mathcal{A}$.

IV. B – Conclusion

Q 32. On applique la question 29 avec $x = u_0(\varepsilon_1)$ et $y = \epsilon_i$: il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i\big(u_0(\epsilon_1)\big) = \epsilon_i$. Posons $u_i = v_i \circ u_0$.
Puisque $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre on a bien $u_i \in \mathcal{A}$, et $\operatorname{rg}(u_i) \leqslant \operatorname{rg}(u_0)) = 1$ donc $\operatorname{rg}(u_i) = 1$ car ce n'est pas l'endomorphisme nul.

Q 33. Il n'y a pas à ma connaissance de moyen simple pour conclure en restant dans l'esprit de l'épreuve.

On peut néanmoins observer que, puisque $\operatorname{Ker}(u_0) = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, on a $u_i(\varepsilon_j) = 0$ pour $j \geqslant 2$. Ainsi, $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(u_i) = \mathrm{E}_{i,1}$. Il est donc tentant de chercher à obtenir plus généralement un endomorphisme $w_{i,j}$ de $\mathcal{A}$ vérifiant $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(w_{i,j}) = \mathrm{E}_{i,j}$ de sorte que, ayant reconnu la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on puisse en déduire que les endomorphismes $(w_{i,j})$ engendrent $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.
On peut avoir l'idée d'appliquer la question 29 : il existe un endomorphisme $v_j \in \mathcal{A}$ tel que $v_j(\varepsilon_j) = \varepsilon_1$, et poser $w_{i,j} = u_i \circ v_j$.
On a bien $w_{i,j} \in \mathcal{A}$ et $w_{i,j}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i$. Cependant, rien ne permet d'affirmer que pour $k \neq j$ on a $w_{i,j}(\varepsilon_k) = 0 \ldots$