Grandes déviations (Centrale PSI 2017 – extrait)

Durée : 4 heures

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans ce sujet sont supposées discrètes.
La partie **I** est composée de trois sous-parties mutuellement indépendantes **A**, **B**, **C**, toutes trois utilisées dans la partie **II**.

Notations et rappels
Soient X une variable aléatoire discrète réelle et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, suivant toutes la loi de X. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 1, on note $\mathbb{E}(Y)$ l'espérance de Y.
Si Y est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, on note $\mathbb{V}(Y)$ la variance de Y.
Si Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on abrège « Y est d'espérance finie » en « $\mathbb{E}(Y) < +\infty$ ».

Si $\tau \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que X vérifie (C_τ) si $\mathbb{E}(e^{\tau|X|}) < +\infty$.

On pourra utiliser la propriété suivante :

$(\mathscr{P})$: si Y et Z sont des variables aléatoires réelles telles que $0 \leqslant Y \leqslant Z$, $\quad \mathbb{E}(Z) < +\infty \implies \mathbb{E}(Y) < +\infty$.

Etant données deux variables aléatoires réelles Y et Z sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on dit que Y est *presque surement égale* à Z lorsque $\mathbb{P}(Y = Z) = 1$.

On admet le résultat suivant (lemme des coalitions) : soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Soient A et B des sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ disjoints. Alors, toute variable aléatoire fonction de Y_n, $n \in A$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des Y_n, $n \in B$.

I Premiers résultats

I. A – Une classe de variables aléatoires

I. A. 1) Soient U et V deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ possédant un moment d'ordre 2 et telles que V n'est pas presque surement nulle.
Montrer que $\mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 \geqslant 0$ et que $\mathbb{E}(U^2)\mathbb{E}(V^2) - \mathbb{E}(UV)^2 = 0$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda V + U$ est presque surement nulle.

I. A. 2)

a) On suppose que X est bornée. Justifier que X vérifie (C_τ) pour tout τ dans $\mathbb{R}_+^*$.

b) On suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $\mathbb{E}(e^{tX})$.

c) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

Quels sont les réels t tels que $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$? Pour ces t, donner une expression simple de $\mathbb{E}(e^{tX})$.

I. A. 3) Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $\mathbb{E}(e^{aX}) < +\infty$ et $\mathbb{E}(e^{bX}) < +\infty$.

a) Montrer que $\forall t \in [a,b]$, $e^{tX} \leqslant e^{aX} + e^{bX}$. En déduire $\mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty$.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble $\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, \mathbb{E}(e^{tX}) < +\infty\right\}$?

b) Soient $k \in \mathbb{N}$, t dans $]a,b[$. On note $\theta_{k,t,a,b}$ la fonction $y \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{y^k e^{ty}}{e^{ay} + e^{by}}$.
Déterminer les limites de $\theta_{k,t,a,b}$ en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que pour tout $t \in]a,b[$, $\mathbb{E}(|X|^k e^{tX}) < +\infty$.

d) On reprend les notations de la question b). Soient $k \in \mathbb{N}$, c et d deux réels tels que $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $M_{k,a,b,c,d} \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $t \in [c,d]$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$: $|\theta_{k,t,a,b}(y)| \leqslant M_{k,a,b,c,d}$.

I. A. 4) Dans cette question, τ est un élément de $\mathbb{R}_+^*$ et X vérifie (C_τ).

a) Montrer que l'ensemble des réels t tels que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}}) < +\infty$ est un intervalle I contenant $[-\tau, \tau]$.

Pour tout t dans I, on note $\phi_\mathrm{X}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$.

b) Montrer que si $\mathrm{X}(\Omega)$ est fini, ϕ_X est continue sur I et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intérieur de I.

c) On suppose maintenant que $\mathrm{X}(\Omega)$ est un ensemble infini dénombrable. On note $\mathrm{X}(\Omega) = \left\{x_n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels deux à deux distincts et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} = x_n)$.

En utilisant les résultats établis à la question **I.A.3** et deux théorèmes relatifs aux séries de fonctions que l'on énoncera complétement, montrer que ϕ_X est continue sur I et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intérieur de I.

d) Vérifier que pour t dans l'intérieur de I et $k \in \mathbb{N}$, $\phi_\mathrm{X}^{(k)}(t) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^k \mathrm{e}^{t\mathrm{X}})$.

e) Soit $\psi_\mathrm{X} = \dfrac{\phi_\mathrm{X}'}{\phi_\mathrm{X}}$. Montrer que ψ_X est croissante sur l'intérieur de I et que, si X n'est pas presque surement égale à une constante, ψ_X est strictement croissante sur l'intérieur de I.

I. B – Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet un moment d'ordre 2.

I. B. 1) Soit δ un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour n dans $\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(|\mathrm{S}_n - n\mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant n\delta) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{n\delta^2}$$

I. B. 2) Si u et v sont deux nombres réels tels que $u < \mathbb{E}(\mathrm{X}) < v$, déterminer la limite de la suite $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \pi_n = \mathbb{P}(nu \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant nv)$$

I. C – Suites sur-additives

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que : $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+n} \geqslant u_m + u_n$.

On suppose que l'ensemble $\left\{\dfrac{u_n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré et on note s sa borne supérieure.

a) Soient m, q, r des éléments de $\mathbb{N}$. On note $n = mq + r$. Comparer les deux nombres réels u_n et $qu_m + u_r$ et montrer que $u_n - ns \geqslant q(u_m - ms) + u_r - rs$.

b) On fixe m dans $\mathbb{N}^*$ et ε dans $\mathbb{R}_+^*$. En utilisant la division euclidienne de n par m, montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$,

$$\frac{u_n}{n} \geqslant \frac{u_m}{m} - \varepsilon$$

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = s$.

II Le théorème des grandes déviations

Soit a un nombre réel.

II. A – Exposant des grandes déviations

II. A. 1) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) = 0$.

II. A. 2) Soient m et n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\mathrm{S}_{m+n} - \mathrm{S}_m$ et S_n ont même loi.

b) Soit b un nombre réel. Montrer que $\mathbb{P}\big(\mathrm{S}_{m+n} \geqslant (n+m)b\big) \geqslant \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant nb) \cdot \mathbb{P}(\mathrm{S}_m \geqslant mb)$.

On suppose dans toute la suite du problème que $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant a) > 0$.

II. A. 3) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na))}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et admet une limite $\gamma_a \leqslant 0$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na) \leqslant \mathrm{e}^{n\gamma_a}$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que X vérifie (C_τ) pour un certain $\tau > 0$ et n'est pas presque surement constante. On suppose également que $a > \mathbb{E}(\mathrm{X})$.

On se propose d'établir que $\gamma_a < 0$ (ce qui montre que la suite $(\mathbb{P}(\mathrm{S}_n \geqslant na))_{n\geqslant 1}$ converge géométriquement vers 0).

II. B – Majoration des grandes déviations

L'intervalle I et la fonction ϕ_X sont définis comme dans la question **I.A.4**.

II. B. 1) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in I \cap \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \phi_X(t)^n, \qquad \mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant \frac{\phi_X(t)^n}{e^{nta}}$$

II. B. 2) On définit la fonction $\chi : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(\phi_X(t)) - ta \end{array} \right.$

a) Montrer que la fonction χ est minorée sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

On note η_a la borne inférieure de χ sur $I \cap \mathbb{R}^+$.

b) Donner un équivalent de $\chi(t)$ lorsque t tend vers 0. En déduire $\eta_a < 0$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S_n \geqslant na) \leqslant e^{n\eta_a}$. En déduire que $\gamma_a < 0$.

d) Dans chacun des deux cas suivants, déterminer l'ensemble des nombres réels a vérifiant les conditions $\mathbb{P}(X \geqslant a) > 0$ et $a > \mathbb{E}(X)$; puis, pour a vérifiant ces conditions, calculer η_a.

i. X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $0 < p < 1$.

ii. X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

La fin du problème (excessivement technique) établissait l'égalité entre les valeurs η_a et γ_a.