Corrigé : étude de l'équation de diffusion (Centrale PC 2018)

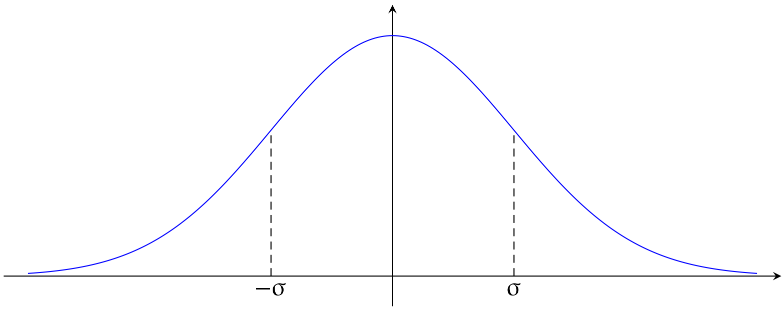
I Préliminaires

I. A – Quelques propriétés de g_σ

Q 1. La fonction g_σ est paire et au voisinage de $+\infty$, $g_\sigma(x) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-x})$ donc g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 2. Le changement de variable bijectif $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ conduit à $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = 1$.

Q 3. g_σ est paire donc on peut restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$. On calcule $g_\sigma'(x) = \dfrac{-x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$ donc g_σ est décroissant sur $\mathbb{R}_+$, et $g_\sigma''(x) = \dfrac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\Big(\dfrac{x^2}{\sigma^2}-1\Big)\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big)$ donc g_σ'' s'annule et change de signe pour $x = \pm\sigma$, ce qui correspond à un changement d'inflexion sur la courbe représentative.



I. B –

Q 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big|f(x)\exp(-i2\pi\xi x)\big| = |f(x)|$ donc si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ il en est de même de $x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi\xi x)$.

Q 5. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres :

- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\exp(-i2\pi\xi x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x)\exp(-i2\pi\xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\big|f(x)\exp(-i2\pi\xi x)\big| = |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ (hypothèse de domination).

Les hypothèses du théorème sont vérifiées, la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I. C –

Q 6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ et puisque f' est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$ existe. Mais si $\ell \neq 0$ alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ell$ et $x \mapsto \ell$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ donc f ne peut l'être non plus. On en déduit que $\ell = 0$.
Par un raisonnement analogue on prouve que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = 0$.

Q 7. Une intégration par parties fournit : $\displaystyle\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} f'(x)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\exp(-i2\pi\xi x)\Big]_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} + i2\pi\xi\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} f(x)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$ et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient grâce à la question précédente l'égalité : $\mathcal{F}(f')(\xi) = i2\pi\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$.

I. D –

Q 8. La fonction $x \mapsto x^{2p}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est paire et $x^{2p}\,\mathrm{e}^{-x^2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-x})$ donc la fonction $x \mapsto x^{2p}\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 9. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} x^{2p}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-x^2}\Big]_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} + \frac{2}{2p+1}\int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} x^{2p+2}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ puis en faisant tendre X vers $+\infty$ on obtient $\mathrm{M}_p = \dfrac{2}{2p+1}\mathrm{M}_{p+1}$.

On en déduit que $\mathrm{M}_p = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\cdots(1)}{2^p}\mathrm{M}_0$ avec $\mathrm{M}_0 = \sqrt{\pi}$, soit $\mathrm{M}_p = \dfrac{(2p)!\sqrt{\pi}}{2^{2p}p!}$.

Q 10. La fonction cos est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc $\exp(-x^2)\cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$ avec $c_p(\xi) = \dfrac{(-1)^p(2\pi\xi)^{2p}}{(2p)!}$.

Q 11. La fonction $x \mapsto \exp(-x^2)\sin(2\pi\xi x)$ étant impaire, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\cos(i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.
Il s'agit maintenant d'appliquer le théorème d'interversion somme/intégrale, le réel ξ étant fixé.
Posons $f_p : x \mapsto c_p(\xi)\exp(-x^2)x^{2p}$ et vérifions les hypothèses du théorème.

- Les fonctions f_p sont continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$ (Q 8.) ;
- la série de fonctions $\sum f_p$ converge simplement et sa somme est continue par morceaux (Q 10.) ;
- la série $\sum \int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)|\,\mathrm{d}x = \sum |c_p(\xi)|\mathrm{M}_p = \sqrt{\pi}\sum \dfrac{(\pi|\xi|)^{2p}}{p!}$ converge (c'est le développement en série entière de $\exp\big((\pi|\xi|)^2\big)$.

Le théorème s'applique : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi)\mathrm{M}_p = \sqrt{\pi}\sum \dfrac{(-1)^p}{p!}(\pi\xi)^{2p} = \sqrt{\pi}\exp(-\pi^2\xi^2)$.

Q 12. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2)\exp\big(-i2\pi(\sqrt{2}\sigma\xi)y\big)\,\mathrm{d}y$ en ayant posé $x = \sqrt{2}\sigma y$. La question précédente donne alors : $\mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) = \exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}g_{\sigma'}(\xi)$ donc $\mu = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

Q 13. Notons $f : (t,x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2+2t}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\Big)$.
On calcule $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2+2t)^{3/2}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\Big) + \dfrac{x^2}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2+2t)^{5/2}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2(\sigma^2+2t)}\Big)$.
On reconnait d'après la question 3. l'expression : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = g''_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ donc f vérifie la condition i.
Par ailleurs, $\lim_{t\to 0^+} f(t,x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\Big) = g_\sigma(x)$ donc f vérifie la condition iii.

II. A –

Q 14. Soit $t > 0$ et $\mathrm{T} > t$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $|f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)| = |f(t,x)| \leqslant \phi_\mathrm{T}(x)$ et ϕ_T est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même de $x \mapsto f(t,x)\exp(-2i\pi\xi x)$.

Q 15. Considérons (pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé) une suite (t_n) de réels strictement positifs convergeant vers 0, et appliquons le théorème de convergence dominée à $u_n = \widehat{f}(t_n,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$ avec $h_n(x) = f(t_n,x)\exp(-i2\pi\xi x)$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- d'après la condition iii la suite (h_n) converge simplement vers la fonction $x \mapsto g_\sigma(x)\exp(-i2\pi\xi x)$, continue par morceaux ;
- d'après la condition ii, $|h_n(x)| \leqslant \phi_\mathrm{T}(x)$ avec $\mathrm{T} = \sup_n t_n + 1$ (la suite (t_n) converge donc est bornée).

La fonction ϕ_T est intégrable donc le théorème s'applique : $\lim u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.
Par caractérisation séquentielle de la limite on en déduit : $\lim_{t\to 0^+} \widehat{f}(t,\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

Q 16. Soit $\mathrm{T} > 0$. Il s'agit maintenant pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre à la fonction $t \mapsto \widehat{f}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,x)\,\mathrm{d}x$ avec $h(t,x) = f(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)$ sur l'intervalle $]0,\mathrm{T}[$.

- Pour tout $t \in]0,\mathrm{T}[$, la fonction $x \mapsto h(t,x)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto h(t,x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\Big|\dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x)\Big| = \Big|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant \chi_\mathrm{T}(x)$.

Puisque χ_T est intégrable le théorème s'applique : la fonction $t \mapsto \widehat{f}(t,\xi)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\mathrm{T}[$; par recouvrement elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\exp(-i2\pi\xi x)\,\mathrm{d}x$.

Q 17. On observe que $\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,\xi) = \mathcal{F}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)\Big)(\xi) = \mathcal{F}\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\Big)(\xi)$ d'après i.

D'après Q 7, $\mathcal{F}\Big(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\cdot)\Big)(\xi) = i2\pi\xi\mathcal{F}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,\cdot)\Big)(\xi) = -4\pi^2\xi^2\mathcal{F}\Big(f(t,\cdot)\Big)(\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(t,\xi)$ donc $\dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,\xi) = -4\pi^2\xi^2\widehat{f}(t,\xi)$.

II. B –

Q 18. Le réel ξ étant fixé les solutions de l'équation différentielle $y' = -4\pi^2\xi^2 y$ sont de la forme $\mathrm{K}\exp(-4\pi^2\xi^2 t)$, K étant une constante. D'après la question précédente, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ il existe une constante $\mathrm{K}(\xi)$, dépendant a priori de ξ, telle que pour tout $t > 0$, $\widehat{f}(t,\xi) = \mathrm{K}(\xi)\exp(-4\pi^2\xi^2 t)$.

Q 19. En faisant tendre t vers 0^+ dans cette égalité on obtient grâce à la question 15 : $\mathrm{K}(\xi) = \lim\limits_{t\to 0^+} \widehat{f}(t,\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

II. C –

Q 20. D'après Q 12, $\widehat{g_\sigma} = \mu g_{\sigma'}$ avec $\sigma' = \dfrac{1}{2\pi\sigma}$ et $\mu = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ donc $\mathrm{K}(\xi) = \exp(-2\pi^2\sigma^2\xi^2)$ et $\widehat{f}(t,\xi) = \exp\Big(-2\pi^2\xi^2(\sigma^2+2t)\Big)$.

Q 21. On a déjà calculé μ en Q 12, ce qui nous a permis d'obtenir $\nu_\sigma = 1$.

Q 22. À $t > 0$ fixé on a $\widehat{f}(t,\xi) = \lambda g_\rho(\xi)$ avec $\rho = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\sigma^2+2t}}$ et $\lambda = \rho\sqrt{2\pi}$ soit $\widehat{f}(t,\xi) = \mathcal{F}(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}})$ d'après Q 12.
D'après le résultat admis on en déduit que $f(t,\xi) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(\xi)$.

On observe qu'avoir calculé explicitement la constante μ à la question 12 rend inutile les deux questions suivantes, que nous allons néanmoins corriger.

Q 23. On observe que $\mathrm{I}(t) = \widehat{f}(t,0)$ donc $\mathrm{I}'(t) = \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial t}(t,0)$ et d'après Q 17, $\mathrm{I}'(t) = 0$ donc I est constante.

Q 24. Par ailleurs, $\mathrm{I}(t) = \lambda_{t,\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x)\,\mathrm{d}x = \lambda_{t,\sigma}$ d'après Q 2, donc l'application $t \mapsto \lambda_{t,\sigma}$ est constante et la condition iii impose alors $\lambda_{t,\sigma} = 1$ pour tout $t > 0$.

III Étude numérique

III. A –

Q 25. Par définition d'une dérivée partielle, $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{f(t+\theta,x)-f(t,x)}{\theta} = \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$.

Q 26. D'après la formule de Taylor-Young,

$$f(t,x+h) = f(t,x) + h\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) + \mathrm{o}(h^2) \quad \text{et} \quad f(t,x-h) = f(t,x) - h\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) + \mathrm{o}(h^2)$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(t,x+h)-2f(t,x)+f(t,x-h)}{h^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)$.

III. B –

Q 27. Le coefficient d'indice i de la matrice AF_n vaut $(1-2r)f_n(i) + r(f_n(i-1)+f_n(i+1))$, cette formule étant aussi vraie pour $i = 1$ et $i = q$ car $f_n(0) = 0$ et $f_n(q+1) = 0$.
Or $f_{n+1}(i) = f_n(i) + \dfrac{\tau}{\delta^2}\Big(f_n(i+1) - 2f_n(i) + f_n(i-1)\Big) = (1-2r)f_n(i) + r\Big(f_n(i+1)+f_n(i-1)\Big)$ donc on a bien $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{AF}_n$.

Q 28. A et B sont symétriques réelles donc diagonalisables, et une récurrence immédiate donne $\mathrm{F}_{n+1} = \mathrm{A}^n\mathrm{F}_n$.

Q 29. Posons $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec P inversible et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_q)$.

Alors $\mathrm{F}_n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}\mathrm{F}_0 = \mathrm{P}\begin{pmatrix}\alpha_1\lambda_1^n\\ \vdots\\ \alpha_q\lambda_q^n\end{pmatrix}$ en ayant posé $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{F}_0 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_q\end{pmatrix}$ donc $(\mathrm{F}_n)_n$ est borné quel que soit F_0 si et seulement si les suites $(\lambda_i^n)_n$ sont toutes bornées pour $i \in [\![1,q]\!]$, soit lorsque $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \subset [-1,1]$.

Q 30. Soit $i \in [\![1,q]\!]$ tel que $|y_i| = \max\{|y_j| \mid j \in [\![1,q]\!]\}$. On a $|y_i| > 0$ car un vecteur propre est non nul.
En posant $y_0 = y_{q+1} = 0$ l'égalité des coefficients de rang i de l'égalité matricielle $\mathrm{BY} = \lambda\mathrm{Y}$ se traduit par $y_{i-1} + y_{i+1} = \lambda y_i$ donc $|\lambda||y_i| \leqslant |y_{i-1}| + |y_{i+1}| \leqslant 2|y_i|$ et $|\lambda| \leqslant 2$.
Puisque cos réalise une bijection entre $[0,\pi]$ et $[-1,1]$ il existe un (unique) $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

Q 31. Ceci a déjà été expliqué à la question précédente.

Q 32. L'équation caractéristique $x^2 - \lambda x + 1 = x^2 - 2x\cos\theta + 1$ possède deux racines complexes $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (confondues lorsque $\theta = 0$ ou π).

- Si $\theta \in \{0, \pi\}$, il existe A et B dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $k \in [\![0, q+1]\!]$, $y_k = (\mathrm{A} + k\mathrm{B})e^{ik\theta}$, mais les conditions $y_0 = y_{q+1} = 0$ imposent $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, ce qui est absurde car Y n'est pas le vecteur nul.
- Si $\theta \in]0, \pi[$, il existe A et B dans R tels que pour tout $k \in [\![0, q+1]\!]$, $y_k = \mathrm{A}\cos(k\theta) + \mathrm{B}\sin(k\theta)$, et les conditions $y_0 = y_{q+1} = 0$ imposent $\mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{B}\sin(q+1)\theta) = 0$. On ne peut avoir $\mathrm{B} = 0$ car Y n'est pas le vecteur nul, donc $\sin(q+1)\theta = 0$, ce qui prouve l'existence d'un entier $j \in [\![1, q]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{j\pi}{q+1}$.

On en déduit que $\lambda = 2\cos\dfrac{j\pi}{q+1}$.

Q 33. Réciproquement, le calcul précédent montre que pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, le vecteur Y_j donc la k^{e} coordonnée est égale à $\sin\Big(\dfrac{kj\pi}{q+1}\Big)$ vérifie $\mathrm{BY}_j = \lambda_j \mathrm{Y}_j$ avec $\lambda_j = 2\cos\Big(\dfrac{j\pi}{q+1}\Big)$. Puisque B ne peut avoir plus de q valeurs propres, on a $\mathrm{Sp(B)} = \{\lambda_j \mid j \in [\![1, q]\!]\}$ et $(\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_q)$ est une base de vecteurs propres de B.

Q 34. On a donc $\mathrm{Sp(A)} = \Big\{(1-2r) + r\lambda_j \;\Big|\; j \in [\![1, q]\!]\Big\}$. Pour que (F_n) soit bornée quel que soit F_0 il faut donc que pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, $\Big|(1-2r) + r\lambda_j\Big| \leqslant 1$, soit $0 \leqslant r(2 - \lambda_j) \leqslant 2$, ou encore $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{2}{2 - \lambda_j}$ puisque $\lambda_j < 2$.
λ_j est minimal pour $j = q$ donc la condition s'écrit $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{1 - \cos(\frac{q\pi}{q+1})} = \dfrac{1}{1 + \cos(\frac{\pi}{q+1})}$, et pour que ceci soit vrai quel que soit $q \geqslant 2$ il faut que $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

IV. A –

Q 35. La variable Y_n suit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2 donc Z_n suit une loi binomiale de paramètres n et 1/2.

Q 36. Puisque S_n a même parité que n, si n et k ne sont pas de même parité alors $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = 0$.

Q 37. $\mathrm{Z}_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{S}_n + \dfrac{n}{2}$ donc si n et k ont même parité, $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k) = \mathbb{P}\Big(\mathrm{Z}_n = \dfrac{k+n}{2}\Big) = \dbinom{n}{\frac{k+n}{2}}\dfrac{1}{2^n}$.

IV. B –

Q 38. On a $\mathbb{V}(\delta \mathrm{S}_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \mathbb{V}\Big(2\delta \mathrm{Z}_{\lfloor 1/\tau \rfloor} - n\delta\Big) = 4\delta^2 \mathbb{V}(\mathrm{Z}_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor$ (variance d'une loi binomiale).

Q 39. $\dfrac{1}{\tau} - 1 < \Big\lfloor \dfrac{1}{\tau} \Big\rfloor \leqslant \dfrac{1}{\tau}$ donc $\lim\limits_{\tau \to 0} \tau \lfloor 1/\tau \rfloor = 1$, soit $\lfloor 1/\tau \rfloor \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\tau}$ et $\mathbb{V}(\delta \mathrm{S}_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \underset{0}{\sim} \dfrac{\delta^2}{\tau}$.

Q 40. Si k et n sont de même parité, $\dfrac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = -\dfrac{p_n(k)}{\tau} = \dfrac{\delta^2}{2\tau}\dfrac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}$.
Si k et n sont de parités opposées, $\dfrac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \dfrac{p_{n+1}(k)}{\tau} = \dbinom{n+1}{\frac{k+n+1}{2}}\dfrac{1}{\tau 2^{n+1}}$ et

$$\frac{\delta^2}{2\tau}\frac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2} = \frac{p_n(k+1) + p_n(k-1)}{2r} = \left(\binom{n}{\frac{k+1+n}{2}} + \binom{n}{\frac{k-1+n}{2}}\right)\frac{1}{\tau 2^{n+1}}$$

et ces deux expressions sont égales d'après la formule de Pascal.
Dans tous les cas on a bien $\dfrac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \dfrac{\delta^2}{2\tau}\dfrac{p_n(k+1) - 2p_n(k) + p_n(k-1)}{\delta^2}$.

Q 41. Lorsque le nombre de particules est important, la probabilité $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k)$ correspond à la densité de particules à la date $n\tau$ à l'emplacement $k\delta$ dans un phénomène de diffusion uni-dimensionnel. La formule précédente, par analogie à l'étude numérique de la partie III, montre que ce phénomène de diffusion correspond à la discrétisation de l'équation $\dfrac{\partial d}{\partial t}(t, x) = \mathrm{D}\dfrac{\partial^2 d}{\partial x^2}(t, x)$ avec $\mathrm{D} = \dfrac{\delta^2}{2\tau}$, où $d(t, x)$ représente la densité de particules à la date t à l'emplacement d'abscisse x.
En posant $f(t, x) = d(t, x\sqrt{\mathrm{D}})$ on homogénéise l'équation qui devient $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)$, et la partie III montre que la condition pour que le système discret soit stable s'écrit $r \leqslant \dfrac{1}{2}$ soit $\dfrac{\tau}{\delta^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$. La question 39 permet alors d'interpréter cette condition par une condition sur la variance : $\mathbb{V}(\delta \mathrm{S}_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \geqslant 2$.