Corrigé : sous-espaces stables (extrait de Centrale PC 2015)

I Première partie

***I. A* –** Si $F = \text{Vect}(u)$, avec $u \neq 0_E$. Alors $f(F) = \text{Vect}(f(u))$ donc $f(F) \subset F$ si et seulement si $f(u) \in F$, soit encore si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Autrement dit, F est stable par u si et seulement si u est un vecteur propre de f.

***I. B* –**

I. B. 1) E et $\{0_E\}$ sont toujours des sous-espaces stables par f.
Dans $\mathbb{R}^2$, les autres sous-espaces sont les droites vectorielles. D'après la question précédente, pour qu'il n'y ait pas d'autres sous-espaces stables il suffit donc de considérer un endomorphisme sans valeur propre. C'est la cas par exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (son polynôme caractéristique $\chi_f(x) = x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle).

I. B. 2) Il est immédiat de constater que $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont deux sous-espaces stables par f : si $x \in \text{Ker}\, f$ alors $f(x) = 0_E \in \text{Ker}\, f$, et si $y \in \text{Im}\, f$ alors $f(y) \in \text{Im}\, f$.
f est non nul donc $\text{Ker}\, f \neq E$ et f n'est pas injectif donc $\text{Ker}\, f \neq \{0_E\}$. Il existe donc au moins trois sous-espaces stables par f : $\{0_E\}$, E et $\text{Ker}\, f$.
De même, f est non nul donc $\text{Im}\, f \neq \{0_E\}$, et f n'est pas injectif donc non surjectif (la dimension de E est finie) et ainsi $\text{Im}\, f \neq E$. Enfin, si on avait $\text{Im}\, f = \text{Ker}\, f$ alors d'après le théorème du rang la dimension de E serait paire, donc lorsque n est impaire f possède au moins quatre sous-espaces stables par f : $\{0_E\}$, E, $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$.
Enfin, considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique (e) est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\text{Ker}\, f = \text{Im}\, f = \text{Vect}(e_1)$ donc f possède au moins trois sous-espaces propres, et il n'en n'existe pas d'autre puisque $\text{Sp}(f) = \{0\}$ donc d'après la question I.A il n'existe pas d'autre droite stable que $\text{Ker}\, f$.

***I. C* –**

I. C. 1) Considérons des vecteurs propres $e_1, \dots, e_k$, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, et posons $f(e_k) = \lambda_k e_k$. Alors $f(F) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_k)) = \text{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_k e_k) \subset F$ donc F est stable par f.
Si $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ alors f est donc stable par f, et l'induit f_H est une homothétie de rapport λ.

I. C. 2) Soit $F = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})$ un sous-espace propre de dimension $k \geqslant 2$. Tout vecteur non nul x de F est vecteur propre donc engendre une droite vectorielle stable par f (question I.A). Il existe une infinité de telles droites donc f possède une infinité de sous-espaces stables.

I. C. 3) Si tout sous-espace de E est stable par f alors en particulier toute droite est stable par f et ainsi pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$ la famille $\big(x, f(x)\big)$ est liée. On sait qu'alors ceci implique que f est une homothétie vectorielle.

***I. D* –**

I. D. 1) f est diagonalisable donc on peut considérer une base (e) de E formée de vecteurs propres de f.
Notons $(e'_1, \dots, e'_k)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre (e') par des vecteurs issus de la famille génératrice (e) pour former une base de E. Par construction les vecteurs que l'on a ajouté engendrent un sous-espace G supplémentaire de F dans E, et puisque cette base de G est constituée de vecteurs propres de f ce sous-espace vectoriel est stable par f (question I.C.1).

I. D. 2) Posons $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ et $F = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$.

F est stable par f donc par hypothèse possède au moins un supplémentaire G stable par f.
Si f n'est pas diagonalisable alors $F \subsetneq E$ donc $\dim G \geqslant 1$. Mais G est stable par f donc on peut définir l'induit f_G de f sur G. La polynôme caractéristique de cet endomorphisme est de degré $\dim G \geqslant 1$ et possède donc au moins une racine λ puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (tout polynôme complexe est scindé).
En notant x un vecteur propre de f_G pour cette valeur propre λ on a $x \neq 0_E$ et $f(x) = \lambda x$ donc $x \in F$, ce qui montre que $F \cap G \neq \{0_E\}$. Ceci est absurde, donc f est diagonalisable.

Ce résultat ne s'étend pas au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons vu que ses seuls sous-espaces stables sont $\{0_E\}$ et E qui possèdent tous deux un supplémentaire stable par f, et pourtant f n'est pas diagonalisable puisque $\mathrm{Sp}(f) = \varnothing$.

II Deuxième partie

II. A –

II. A. 1) Supposons $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. Alors pour tout $x \in F$ il existe un (unique) p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in F^p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in E_i$. Mais alors $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in F$, donc F est stable par f.

II. A. 2) f est supposé diagonalisable donc pour tout $x \in E$, et *a fortiori* pour tout $x \in F$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

II. A. 3) Puisque les x_i sont non nuls pour $1 \leqslant i \leqslant r$, ce sont des vecteurs propres de f pour des valeurs propres deux à deux distinctes sont forment une famille libre. Par définition c'est aussi une famille génératrice de V_x donc $\mathcal{B}_x$ est une base de V_x.

II. A. 4) On a $f(x_i) = \lambda_i x_i$ donc pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^{r} f^{j-1}(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i \in V_x$, et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_x}\big(x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

II. A. 5) On reconnait une matrice de Vandermonde dont le déterminant $\prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$ est non nul donc la famille $\big(f^{j-1}(x)\big)_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

II. A. 6) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in V_x$ donc il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{K}^r$ tel que $x_i = \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k f^k(x)$. Mais par hypothèse F est stable par f et $x \in F$ donc pour tout $k \in [\![0, r-1]\!]$, $f^k(x) \in F$. Par linéarité il en résulte que $x_i \in F$.

Ainsi, nous avons montré que $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in F \cap E_i$, autrement dit $F \subset \sum_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. L'inclusion réciproque est évidente, et la somme est directe car la somme $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ l'est, donc $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

II. B –

II. B. 1) On a $\dim E = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$ avec $\dim E = n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_i \geqslant 1$ donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim E_i = 1$.

II. B. 2) D'après la question I.A, il y a donc exactement n droites stables par f : les droites $E_1, \dots, E_n$.

II. B. 3) Soit F un sous-espace de E stable par f et de dimension $k \in [\![2, n-1]\!]$. D'après la partie II.A la stabilité équivaut à la condition $F = \sum_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ ou encore, compte tenu d'une inclusion évidente et de la somme directe, si et seulement si $\dim F = \sum_{i=1}^{p} \dim(F \cap E_i)$.

Or $\dim E_i = 1$ donc $\dim(F \cap E_i) \in \{0, 1\}$. F est donc stable par f si et seulement s'il existe exactement k droites incluses dans F parmi les droites E_i, ce qui équivaut encore à dire que $F = \bigoplus_{i \in J} E_i$, où $j \subset [\![1, n]\!]$ est de cardinal k.

Il y a donc exactement $\binom{n}{k}$ sous-espaces de dimension k stables par f.

II. B. 4) Tout ceci nous donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ sous-espaces stables par f, les sous-espaces $\displaystyle\bigoplus_{i\in J} E_i$ où J est une partie de $[\![1,n]\!]$.

III Troisième partie

III. A –

III. A. 1) Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\deg P' \leqslant n-1$ donc $D(P) = P' \in \mathbb{K}_n[X]$: $\mathbb{K}_n[X]$ est bien stable par D.

Dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, la matrice associée à D est $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ car $D(X^k) = kX^{k-1}$.

III. A. 2)

a) L'ensemble $\mathcal{E} = \Big\{\deg P \;\Big|\; P \in F \setminus \{0\}\Big\} \subset \mathbb{N}$ est non vide car $\dim F \geqslant 1$. S'il n'était pas majoré on pourrait construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de F telle que la suite $(\deg P_n)$ soit strictement croissante. Mais une telle famille est libre, donc F serait de dimension infinie, ce qui n'est pas. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc non vide est majoré ; on peut considérer son plus grand élément n.

Puisque $n \in \mathcal{E}$ il existe un polynôme $R \in F$ de degré n, et puisque $n = \max \mathcal{E}$ on a $F \subset \mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\deg D^i(R) = n-i$ donc la famille $(D^i(R))_{0\leqslant i\leqslant n}$ est échelonnée en degré ; c'est une famille libre.

c) Cette famille est de cardinal $n+1$ donc $\dim F \geqslant n+1$. Mais $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ donc $F = \mathbb{K}_{n+1}[X]$.

III. A. 3) Les questions III.A.1 et III.A.2 ont montré que les sous-espaces stables par D et *de dimensions finies* sont $\{0\}$ et les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$. Considérons maintenant un sous-espace stable de dimension infinie F.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ne peut avoir $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ donc il existe un polynôme R de F de degré $d \geqslant n+1$. Comme à la question III.A.2b on montre que la famille $(D^i(R))_{0\leqslant i\leqslant d}$ est libre, et étant échelonnée en degré engendre $\mathbb{K}_d[X]$. Puisque F est stable par D ceci prouve que $\mathbb{K}_d[X] \subset F$ et qu'*a fortiori* $\mathbb{K}_n[X] \subset F$. Ainsi, nous avons prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$, autrement dit que $F = \mathbb{K}[X]$.

En conclusion, les sous-espaces stables par D de $\mathbb{K}[X]$ sont $\{0\}$, $\mathbb{K}[X]$ et tous les sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

III. B –

III. B. 1) Une famille libre ne peut contenir le vecteur nul donc si $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base alors $f^{n-1}(u) \neq 0_E$. Réciproquement, montrer que si $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ alors $\mathcal{B}_{f,u}$ est libre donc constitue une base de E (car de cardinal n) est un résultat classique sur lequel je ne reviendrai pas.

III. B. 2) On a $f\Big(f^{n-1}(u)\Big) = f^n(u) = 0_E$ et pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, $f\Big(f^{n-i}(u)\Big) = f^{n-(i-1)}(u)$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{f,u}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

III. B. 3) Posons pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_k = (k-1)!f^{n-k}(u)$. Alors $f(e_1) = 0_E$ et pour tout $k \in [\![2,n]\!]$, $f(e_k) = (k-1)!f^{n-(k-1)}(u) = (k-1)e_{k-1}$ donc $\mathrm{Mat}_{(e)}(f) = A_{n-1}$.

III. B. 4) On définit une application linéaire $\phi : E \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$ en posant $\phi(e_k) = X^{k-1}$. Il s'agit d'un isomorphisme puisque l'image de la base (e) est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Puisque $\mathrm{Mat}_{(e)}(f) = A_{n-1} = \mathrm{Mat}_{(X^k)}(D)$ nous avons pour tout $x \in E$, $\phi\Big(f(x)\Big) = D\Big(\phi(x)\Big)$. Ceci montre que H est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si $\phi(H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ stable par D : en effet,

$$\forall x \in H,\ f(x) \in H \iff \forall x \in H,\ \phi\Big(f(x)\Big) \in \phi(H) \iff \forall x \in H,\ D\Big(\phi(x)\Big) \in \phi(H) \iff \forall P \in \phi(H),\ D(P) \in \phi(H).$$

Or nous connaissons les sous-espaces stables par D de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$: ce sont $\{0\}$ et les $\mathbb{K}_i[X]$ pour $i \in [\![0,n-1]\!]$. Les sous-espaces de E stables par f sont donc $\{0\}$ et les $H_i = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i) = \mathrm{Vect}\Big(f^{n-1}(u),\dots,f^{n-i}(u)\Big)$ pour $i \in [\![0,n-1]\!]$. Il y en a exactement $n+1$.

Soit enfin $i \in [\![0,n]\!]$. pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f^i\left(f^{n-j}(u)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leqslant i \\ f^{n-(j-i)}(u) & \text{si } j > i \end{cases}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{f,u}}(f^i) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_i & \mathrm{I}_{j-i} \\ \hline \mathrm{O}_{j-i,i} & \mathrm{O}_{j-i} \end{array}\right)$ et ainsi $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Vect}\left(f^{n-1}(u),\dots,f^{n-i}(u)\right) = \mathrm{H}_i$.