# Corrigé : autour de la matrice jacobienne (Centrale PC 2014)

## I Une interprétation du jacobien

***I. A –*** Avec des notations évidentes, $f_i(x_1,\dots,x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$ donc $\partial_j f_i(x) = a_{ij}$. La fonction $f$ possède des dérivées partielles continues donc $f$ et de classe $\mathscr{C}^1$, et $\mathrm{J}_f(x) = \mathrm{A}$.

***I. B –***

**I. B. 1)** L'application $t \mapsto ta$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ et $g$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ donc $\varphi$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et d'après la règle de la chaîne, $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j g(ta_1,\dots,ta_n)$.

**I. B. 2)** D'après la formule de Taylor-Young on a $\varphi(t) \underset{0}{=} \varphi(0) + t\varphi'(0) + \mathrm{o}(t)$, ce qui donne ici : $g(ta) \underset{0}{=} g(0) + t\sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j g(0) + \mathrm{o}(t)$.

***I. C –***

**I. C. 1)** Notons $e_j$ l'élément $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ de $\mathbb{R}^n$, le réel 1 étant situé au rang $j$. On a $t_j = te_j$, et en appliquant la question I.B.2 on a $f(t_j) = f(te_j) = f(0) + t\partial_j f(0) + \mathrm{o}(t) = t\partial_j f(0) + \mathrm{o}(t)$. Ainsi,

$$\det(f(t_1),\dots,f(t_n)) = \det\Big(t\partial_1 f(0) + \mathrm{o}(t),\dots,t\partial_n f(0) + \mathrm{o}(t)\Big) = t^n \det\Big(\partial_1 f(0) + \mathrm{o}(1),\dots,\partial_n f(0) + \mathrm{o}(1)\Big).$$

Par continuité du déterminant on a $\det\Big(\partial_1 f(0) + \mathrm{o}(1),\dots,\partial_n f(0) + \mathrm{o}(1)\Big) = \det\Big(\partial_1 f(0),\dots,\partial_n f(0)\Big) + \mathrm{o}(1) = \mathrm{jac}_f(0) + \mathrm{o}(1)$ et en reportant : $\det(f(t_1),\dots,f(t_n)) = t^n \mathrm{jac}_f(0) + \mathrm{o}(t^n)$.

**I. C. 2)** On a par ailleurs $\det(t_1,\dots,t_n) = t^n \det(e_1,\dots,e_n) = t^n$ donc $\lim_{t\to 0} \dfrac{\det(f(t_1),\dots,f(t_n))}{\det(t_1,\dots,t_n)} = \mathrm{jac}_f(0)$.

## II Une interprétation de la divergence dans un cas particulier

***II. A –*** D'après la question I.A on a $\mathrm{J}_f(x) = \mathrm{A}$ donc $\mathrm{div}_f(x) = \mathrm{tr}\,\mathrm{A}$.

***II. B –***

**II. B. 1)** Posons $a = (a_1,a_2)$ et $u_a(t) = (x_1(t),x_2(t))$.
Alors $x_i'(t) = \lambda_i x_i(t)$ et $x_i(0) = a_i$ donc $x_i(t) = a_i\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ et ainsi $u_a(t) = \Big(a_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, a_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\Big)$.

**II. B. 2)** En posant $b = (b_1,b_2)$ on a

$$\det(u_a(t),u_b(t)) = \begin{vmatrix} a_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} & b_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ a_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t} & b_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathrm{e}^{(\lambda_1+\lambda_2)t} = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr(A)}}\det(a,b) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{div}_f(a)}\det(u_a(0),a_b(0)).$$

***II. C –***

**II. C. 1)** On a cette fois $x_2'(t) = \lambda x_2(t)$ donc $x_2(t) = a_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ et $x_1'(t) = \lambda x_1(t) + \mu x_2(t) = \lambda x_1(t) + \mu a_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, équation qui conduit à $x_1(t) = (a_1 + \mu a_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}$. Ainsi, $u_a(t) = \Big((a_1 + \mu a_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t}, a_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\Big)$.
On a $\det(u_a(t),u_b(t)) = \begin{vmatrix} (a_1 + \mu a_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t} & (b_1 + \mu b_2 t)\mathrm{e}^{\lambda t} \\ a_2\,\mathrm{e}^{\lambda t} & b_2\,\mathrm{e}^{\lambda t}\end{vmatrix} = (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathrm{e}^{2\lambda t} = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{tr(A)}}\det(a,b) = \mathrm{e}^{t\,\mathrm{div}_f(a)}\det(u_a(0),a_b(0))$.

**II. C. 2)** Lorsque le polynôme caractéristique de A est scindé la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable donc semblable à l'une des deux matrices définies en II.B (cas diagonalisable) ou en II. C.1 (cas trigonalisable non diagonalisable).
Posons donc $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ avec $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
Posons $v_a(t) = \mathrm{P}^{-1}u_a(t)$. Alors $u_a'(t) = \mathrm{A}u_a(t) \iff \mathrm{P}^{-1}u_a'(t) = \mathrm{DP}^{-1}u_a(t) \iff v_a'(t) = \mathrm{D}v_a(t)$. D'après ce qui précède on peut écrire $\det(v_a(t),v_b(t)) = \exp(t\,\mathrm{div}_g(a))\det(v_a(0),v_b(0))$ où $g$ est la fonction définie par $g(x) = \mathrm{D}x$.
D'après II.A, $\mathrm{div}_g(x) = \mathrm{tr}\,\mathrm{D} = \mathrm{tr}\,\mathrm{A} = \mathrm{div}_f(a)$ car la trace est un invariant de similitude.
Par ailleurs on a $\det(v_a(t),v_b(t)) = \det(\mathrm{P}^{-1})\det(u_a(t),u_b(t))$, donc $\det(u_a(t),u_b(t)) = \exp(t\,\mathrm{div}_f(a))\det(u_a(0),u_b(0))$.

**II. C. 3)** Dans le cas général, on peut considérer la fonction $\phi : t \mapsto \det(u_a(t), u_b(t))$ et dériver :

$$\phi'(t) = \det(u_a'(t), u_b(t)) + \det(u_a(t), u_b'(t)) = \det(\mathrm{A}u_a(t), u_b(t)) + \det(u_a(t), \mathrm{A}u_b(t))$$

et le passage un peu fastidieux aux coefficients aboutit à l'égalité $\phi'(t) = (\operatorname{tr}\mathrm{A})\det(u_a(t), u_b(t)) = (\operatorname{tr}\mathrm{A})\phi(t)$.
On en déduit que $\phi(t) = \exp(t(\operatorname{tr}\mathrm{A}))\phi(0)$, soit $\det(u_a(t), u_b(t)) = \exp(t\operatorname{div}_f(a))\det(u_a(0), u_b(0))$.

# III Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

***III. A –*** La fonction $f$ étant de classe $\mathscr{C}^2$ il en est de même de $f_k$ et le théorème de Schwarz s'applique : $f_{i,j,k}(x) = \partial^2_{i,j} f_k(x) = \partial^2_{j,i} f_k(x) = f_{j,i,k}(x)$.

***III. B –***

**III. B. 1)** Le caractère anti-symétrique de $\mathrm{J}_f(x)$ se traduit par l'égalité : $\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $\partial_j f_k(x) = -\partial_k f_j(x)$. En dérivant par rapport à la $i^{\mathrm{e}}$ variable on obtient $\partial^2_{i,j} f_k(x) = -\partial_{i,k} f_j(x)$, soit $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.

**III. B. 2)** La question III.A montre qu'on peut permuter les deux premiers indices sans changer de signe ; la question III.B.1 montre qu'on peut permuter les deux derniers indices en changeant le signe. En utilisant ces deux questions on obtient les égalités :

$$f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x) = -f_{k,i,j}(x) = f_{k,j,i}(x) = f_{j,k,i}(x) = -f_{j,i,k}(x) = -f_{i,j,k}(x)$$

donc $f_{i,j,k}(x) = 0$.

**III. B. 3)** On vient de montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\partial_i(\partial_j f_k)(x) = 0$ donc il existe une constante $a_{j,k}$ telle que $\partial_j f_k(x) = a_{j,k}$.

Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ on en déduit l'existence d'une constante $b_k$ telle que $f_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} x_k + b_k$.

Ces égalités, vraies pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, traduisent l'égalité matricielle $f(x) = \mathrm{A}x + b$ avec $\mathrm{A} = (a_{j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$. D'après I.A on a alors $\mathrm{J}_f(x) = \mathrm{A}$ donc A est antisymétrique.

**III. B. 4)** La question III. B.3 montre que l'existence de $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et de $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \mathrm{A}x + b$ est une condition nécessaire ; la question I.A montre que cette condition est suffisante.

***III. C –*** Supposons l'existence de $g$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(x) = \partial_i g(x)$. Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et d'après le théorème de Schwarz, $\partial_j f_i(x) = \partial^2_{j,i} g(x) = \partial^2_{i,j} g(x) = \partial_i f_j(x)$ donc $\mathrm{J}_f(x)$ est symétrique.

Réciproquement, supposons $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ et la matrice $\mathrm{J}_f(x)$ symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et considérons la fonction définie par $g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)\,\mathrm{d}t$.
Pour montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ il faut commencer par prouver que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $x_j \mapsto \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, sachant que $x_j \mapsto f(tx)$ est bornée sur tout segment. On peut dès lors calculer

$$\partial_j g(x) = \int_0^1 f_j(tx)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 t\partial_j f_i(tx)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(f_j(tx) + \sum_{i=1}^{n} tx_i \partial_j f_i(tx)\Big)\mathrm{d}t$$

Puisque $\mathrm{J}_f(x)$ est symétrique on a $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ et ainsi $f_j(tx) + \sum_{i=1}^{n} tx_i \partial_i f_j(tx)$ apparaît comme la dérivée par rapport à $t$ de $tf_j(tx)$. Ainsi, $\partial_i g(x) = \Big[tf_j(tx)\Big]_{t=0}^{t=1} = f_j(x)$. Enfin, puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ il résulte de ceci que $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$, et que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_j(x) = \partial_i g(x)$.

# IV Matrice jacobienne orthogonale

***IV. A –***

**IV. A. 1)** $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc d'après le théorème de Schwarz, $\partial^2_{j,k} f_p(x) = \partial^2_{k,j} f_p(x)$, ce qui conduit à l'égalité $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j}$.
Par hypothèse on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{J}_f(x)^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_f(x) = \mathrm{I}$ donc pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \partial_i f_p(x) \partial_j f_p(x) = \delta_{i,j}$. En dérivant cette égalité par rapport à $x_k$ on obtient $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \partial_i f_p(x) \partial^2_{k,j} f_p(x) + \sum_{p=1}^{n} \partial^2_{k,i} f_p(x) \partial_j f_p(x) = 0$, soit $\alpha_{i,k,j} + \alpha_{j,k,i} = 0$.

**IV. A. 2)** On permute les deux derniers indices sans changer de signe, on permute le premier et le dernier indice en changeant de signe. Dès lors on a $\alpha_{i,j,k} = -\alpha_{k,j,i} = -\alpha_{k,i,j} = \alpha_{j,i,k} = \alpha_{j,k,i} = -\alpha_{i,k,j} = -\alpha_{i,j,k}$ donc $\alpha_{i,j,k} = 0$.

**IV. A. 3)** $\alpha_{i,j,k}(x)$ est le produit scalaire des vecteurs $\partial_i f(x)$ et $\partial_{j,k} f(x)$. Or les vecteurs $\partial_i f(x)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ puisque la matrice $\mathrm{J}_f(x)$ est orthogonale. On en déduit que pour tout $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $\partial_{j,k} f(x) = 0$. On en déduit comme à la question III.B.3 qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \mathrm{A}x + b$, et d'après I.A on a $\mathrm{A} = \mathrm{J}_f(x)$ donc A est orthogonale.

***IV. B –*** La question IV.A a montré qu'une condition nécessaire pour que $(\mathscr{P})$ soit réalisée est qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \mathrm{A}x + b$. La question I.A prouve la réciproque.

***IV. C –*** Supposons $(\mathscr{P})$ vérifiée. D'après la question précédente, $f(x) = \mathrm{A}x + b$ avec $\mathrm{A} = (a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On a $g \circ f(x) = g(\mathrm{A}x + b)$ donc $\partial_i (g \circ f)(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \partial_j g(\mathrm{A}x + b)$, puis $\partial^2_{i,i}(g \circ f)(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,j} a_{i,k} \partial^2_{k,j} g(\mathrm{A}x + b)$. Ainsi, puisque A est orthogonale,

$$\Delta_{g \circ f}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} a_{i,k}\Big) \partial^2_{k,j} g(\mathrm{A}x + b) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} \partial^2_{k,j} g(\mathrm{A}x + b) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{j,j} g(\mathrm{A}x + b) = \Delta_g \circ f(x).$$

Réciproquement, supposons $\Delta_{g \circ f}(x) = \Delta_g \circ f(x)$ vrai pour toute application $g$ de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
Appliquons cette hypothèse à la fonction $g_i : x \mapsto x_i$. On a $g_i \circ f = f_i$ et $\Delta_{g_i} = 0$ donc $\Delta_{f_i} = 0$.
Appliquons maintenant cette hypothèse à $g_{i,j} : x \mapsto x_i x_j$. On a $g_{i,j} \circ f = f_i f_j$ et $\Delta_{g_{i,j}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j \end{cases}$. On a donc $\Delta_{f_i f_j} = 2\delta_{i,j}$.
Par ailleurs, $\partial_k (f_i f_j) = (\partial_k f_i) f_j + f_i (\partial_k f_j)$ et $\partial^2_k (f_i f_j) = (\partial^2 f_i) f_j + f_i (\partial^2_k f_j) + 2(\partial_k f_i)(\partial_k f_j)$ donc

$$\Delta_{f_i f_j} = (\Delta_{f_i}) f_j + f_i (\Delta_{f_j}) + 2\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f_i)(\partial_k f_j) = 2\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f_i)(\partial_k f_j) \quad \text{puisque on a vu que } \Delta_{f_i} = 0.$$

Ceci prouve donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\partial_k f_i)(\partial_k f_j) = \delta_{i,j}$, égalités qui traduisent le fait que les colonnes de la matrice $\mathrm{J}_f(x)$ forment une base orthonormée, autrement dit que la matrice $\mathrm{J}_f(x)$ est orthogonale. La propriété $(\mathscr{P})$ est vérifiée.