Étude d'une équation fonctionnelle (Centrale PC 1996)

Durée : 4 heures

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des applications lipschitziennes, c'est-à-dire des applications ϕ pour lesquelles existe une constante $K_\phi \geqslant 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \left|\phi(x)-\phi(y)\right| \leqslant K_\phi |x-y|$$

On a pour but, dans ce problème, de rechercher les fonctions $F \in \mathcal{L}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) - \lambda F(x+a) = f(x), \tag{1}$$

où f est une fonction de $\mathcal{L}$ donnée et où a et λ sont deux réels non nuls donnés.

Les parties III et IV sont largement indépendantes.

Partie I. Question préliminaire

Question 1. Soit $F \in \mathcal{F}$ vérifiant (1). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$F(x) = \lambda^n F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) \tag{2}$$

$$F(x) = \lambda^{-n} F(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka). \tag{3}$$

Partie II. Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

Question 2. Prouver que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

Question 3. Soit $f \in \mathcal{F}$ dérivable. Montrer que, pour que f appartienne à $\mathcal{L}$, il faut et il suffit que sa dérivée soit bornée.

Question 4. f et g étant deux fonctions bornées de $\mathcal{L}$, montrer que leur produit fg est aussi élément de $\mathcal{L}$. En est-il de même si f et g ne sont pas toutes les deux bornées ?

Question 5. Soit $f \in \mathcal{L}$. Montrer l'existence de deux réels positifs A et B tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f(x)\right| \leqslant A|x| + B. \tag{4}$$

Question 6. Soit $f \in \mathcal{F}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que, pour tout x et y réels vérifiant $0 \leqslant x-y \leqslant 1$, on a $\left|f(x)-f(y)\right| \leqslant M|x-y|$. Démontrer que $f \in \mathcal{L}$.

Partie III. Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.1 On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| < 1$

Question 7.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n f(x+na)$ est absolument convergente (on pourra utiliser la question 5).

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $F \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na)$$

■ Étude de 3 cas particuliers

Question 8. On suppose que f est la fonction constante f_1 définie par $f_1(x) = 1$. Montrer que $f_1 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_1 correspondante.

Question 9. On suppose que f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$. Montrer que $f_2 \in \mathcal{L}$ et que la fonction F_2 correspondante est donnée par

$$\mathrm{F}_2(x) = \frac{\cos x - \lambda\cos(x-a)}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2} \tag{5}$$

Question 10. On suppose que f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$. Montrer que $f_3 \in \mathcal{L}$ et déterminer la fonction F_3 correspondante.

III.2 On suppose dans cette sous-partie que $|\lambda| > 1$

Question 11.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda^{-n} f(x - na)$ est absolument convergente.

b) En déduire qu'il existe une, et une seule, fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et que F est donnée par

$$\mathrm{F}(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$$

■ Étude de 3 cas particuliers

Dans chacun des trois cas particuliers suivants, déterminer la fonction F_i correspondante :

Question 12. f est la fonction constante f_1 définie par $f_1(x) = 1$.

Question 13. f est la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \cos x$.

Question 14. f est la fonction f_3 définie par $f_3(x) = \sin x$.

Partie IV. Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.1 On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = 1$

Question 15. Montrer que, pour qu'il existe une fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1), il faut que f soit bornée.

Question 16.

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x + a) = 0.$$

b) Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

Question 17. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq 1$, montrer qu'en faisant tendre λ vers 1 dans la fonction F_2 donnée par (5), on obtient une fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $\cos a = 1$, établir qu'il n'existe aucune fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

IV.2 On suppose dans cette sous-partie que $\lambda = -1$

Question 18.

a) Montrer, en en explicitant une, qu'il existe des fonctions $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ non nulles vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(x + a) = 0$$

b) Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1). F est-elle unique ?

Question 19. On suppose dans cette question que f est la fonction définie par $f(x) = \cos x$.

a) Si $\cos a \neq -1$, expliciter une fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

b) Si $\cos a = -1$, établir qu'il n'existe aucune fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1).

Question 20. On suppose dans cette question que $a = 1$ et que $f \in \mathcal{L}$ est décroissante, de limite nulle en $+\infty$ et à dérivée f' croissante.

a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n f(x+n)$ converge.

b) Montrer qu'il existe une, et une seule, fonction $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$ vérifiant (1) et telle que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = 0$ (pour établir que $\mathrm{F} \in \mathcal{L}$, on pourra utiliser la question 6).