Corrigé : étude d'une équation fonctionnelle (Centrale PC 1996)

Partie I. Question préliminaire

Question 1. On peut bien entendu procéder par récurrence, ou par télescopage à partir de l'égalité : $\lambda^k f(x+ka) = \lambda^k \mathrm{F}(x+ka) - \lambda^{k+1}\mathrm{F}(x+(k+1)a)$ ce qui conduit à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka) = \mathrm{F}(x) - \lambda^n \mathrm{F}(x+na)$$

Pour la seconde égalité, on part de $\lambda^{-k} f(x-ka) = \lambda^{-k}\mathrm{F}(x-ka) - \lambda^{-(k-1)}\mathrm{F}(x-(k-1)a)$ qui donne par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka) = \lambda^{-n}\mathrm{F}(x-na) - \mathrm{F}(x)$$

Partie II. Quelques propriétés des fonctions lipschitziennes

Question 2. La fonction nulle est lipschitzienne donc appartient à $\mathcal{L}$.
Soient ϕ et ψ deux fonctions lipschitziennes, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|(\lambda\phi+\psi)(x) - (\lambda\phi+\psi)(y)\right| \leqslant |\lambda| \cdot \left|\phi(x)-\phi(y)\right| + \left|\psi(x)-\psi(y)\right| \leqslant \left(|\lambda|\mathrm{K}_\phi + \mathrm{K}_\psi\right)|x-y|$$

donc $\lambda\phi+\psi$ est lipschitzienne ; on en déduit que $\mathcal{L}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

Question 3. Supposons f' bornée : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant \mathrm{M}$. D'après l'inégalité des accroissements finis on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)| \leqslant \mathrm{M}|x-y|$ donc f est lipschitzienne.
Réciproquement, supposons f lipschitzienne. Soit $x \in \mathbb{R}$, Pour tout $y \neq x$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leqslant \mathrm{K}_f$ donc en faisant tendre y vers x on obtient : $|f'(x)| \leqslant \mathrm{K}_f$, ce qui montre que f' est bornée.

Question 4. Soit M_f et M_g deux réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}_f$ et $|g(x)| \leqslant \mathrm{M}_g$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\left|f(x)g(x)-f(y)g(y)\right| = \left|f(x)(g(x)-g(y)) + g(y)(f(x)-f(y))\right| &\leqslant |f(x)| \cdot |g(x)-g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x)-f(y)| \\ &\leqslant \left(\mathrm{M}_f\mathrm{K}_g + \mathrm{M}_g\mathrm{K}_f\right)|x-y|\end{aligned}$$

donc fg est lipschitzienne.
Ce n'est pas forcément le cas si l'une des deux fonctions n'est pas bornée. Par exemple, les deux fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sin x$ sont lipschitziennes (leurs dérivées sont bornées) mais pas leur produit $fg : x \mapsto x\sin x$ puisque sa dérivée $(fg)' : x \mapsto \sin x + x\cos x$ n'est pas bornée (par exemple, $\lim (fg)'(2n\pi) = +\infty$).

Question 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)-f(0)| \leqslant \mathrm{K}_f|x-0|$ donc $|f(x)| \leqslant \mathrm{A}|x| + \mathrm{B}$ avec $\mathrm{A} = \mathrm{K}_f$ et $\mathrm{B} = |f(0)|$.

Question 6. Soient $x \leqslant y$ deux réels. Il existe un (unique) entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x+n \leqslant y < x+n+1$ (cet entier vaut $n = \lfloor y-x \rfloor$). On écrit alors :

$$\left|f(y)-f(x)\right| = \left|f(y)-f(x+n) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x+k+1)-f(x+k)\right)\right| \leqslant \left|f(y)-f(x+n)\right| + \sum_{k=0}^{n-1}\left|f(x+k+1)-f(x+k)\right|$$

Par hypothèse on a $\left|f(y)-f(x+n)\right| \leqslant \mathrm{M}(y-x-n)$ et pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\left|f(x+k+1)-f(x+k)\right| \leqslant \mathrm{M}$ donc

$$\left|f(y)-f(x)\right| \leqslant \mathrm{M}(y-x-n) + n\mathrm{M} = \mathrm{M}(y-x) = \mathrm{M}|y-x|$$

ce qui prouve que f est lipschitzienne.

Partie III. Étude de (1) pour $|\lambda| \neq 1$

III.1

Question 7.

a) $f \in \mathcal{L}$ donc d'après la question 5 il existe A et B réels positifs tels que $|f(x)| \leqslant \mathrm{A}|x| + \mathrm{B}$. Ainsi,

$$\left|\lambda^n f(x+na)\right| \leqslant \mathrm{A}|x+na| \cdot |\lambda|^n + \mathrm{B}|\lambda|^n = \mathrm{O}(n|\lambda|^n)$$

Soit μ un réel tel que $|\lambda| < \mu < 1$; alors $\left|\lambda^n f(x+na)\right| = \mathrm{O}(\mu^n)$ et puisque $\sum \mu^n$ converge on en déduit que $\sum \lambda^n f(x+na)$ converge absolument.

b) Notons F la somme de cette série. Alors :

$$\mathrm{F}(x) - \lambda \mathrm{F}(x+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} f(x+(n+1)a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) - \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^n f(x+na) = f(x)$$

donc F est solution de (1).
Vérifions maintenant que cette fonction appartient à $\mathcal{L}$:

$$\left|\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(y)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n \left|f(x+na) - f(y+na)\right| \leqslant \mathrm{K}_f |x-y| \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^n = \frac{\mathrm{K}_f}{1-|\lambda|} |x-y|$$

donc F est bien lipschitzienne.
Supposons enfin l'existence d'une autre fonction $\mathrm{G} \in \mathcal{L}$ solution de (1). D'après la question 1 on a

$$\mathrm{G}(x) = \lambda^n \mathrm{G}(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x+ka).$$

G est lipschitzienne donc d'après la question 5, $\mathrm{G}(x+na) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n)$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n \mathrm{G}(x+na) = 0$.
En passant à la limite on en déduit que $\mathrm{G}(x) = \mathrm{F}(x)$, ce qui assure l'unicité de F.

Question 8. $f_1 \in \mathcal{L}$ car f_1 est dérivable et sa dérivée est bornée (question 3) et $\mathrm{F}_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n = \dfrac{1}{1-\lambda}$ est aussi constante.

Question 9. $f_2 \in \mathcal{L}$ car f_2 est dérivable et sa dérivée est bornée, et $\mathrm{F}_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos(x+na)$.
$\lambda^n \cos(x+na) = \lambda^n \dfrac{\mathrm{e}^{i(x+na)} + \mathrm{e}^{-i(x+na)}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}}{2}(\lambda \mathrm{e}^{ia})^n + \dfrac{\mathrm{e}^{-ix}}{2}(\lambda \mathrm{e}^{-ia})^n$ donc

$$\mathrm{F}_2(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{ia}}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda \mathrm{e}^{-ia}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{ix}(1-\lambda \mathrm{e}^{-ia}) + \mathrm{e}^{-ix}(1-\lambda \mathrm{e}^{ia})}{2(1-2\lambda\cos a + \lambda^2)} = \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2}$$

Question 10. $f_3 \in \mathcal{L}$ car f_3 est dérivable et sa dérivée est bornée. On peut calculer $\mathrm{F}_3(x)$ par un calcul semblable au précédent ou observer que $f_3(x) = f_2(x+\pi/2)$ donc

$$\mathrm{F}_3(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_2(x+\pi/2+na) = \mathrm{F}_2(x+\pi/2) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x-a)}{1-2\lambda\cos a + \lambda^2}$$

III.2

Question 11.

a) $f \in \mathcal{L}$ donc f est lipschitzienne et d'après la question 5, $f(x-na) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(n)$. Ainsi, $\left|\lambda^{-n} f(x-na)\right| = \mathrm{O}(n\lambda^{-n})$ ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 1} \lambda^{-n} f(x+na)$.

b) Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x - na)$. On a

$$F(x) - \lambda F(x+a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) + \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-(n-1)} f(x-(n-1)a) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda - n f(x-na) + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n} f(x-na) = f(x)$$

donc F est solution de (1).
Vérifions que F appartient à $\mathcal{L}$:

$$\left|F(x) - F(y)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{-n} \left|f(x-na) - f(y-na)\right| \leqslant K_f |x-y| \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda|^{-n} = \frac{K_f}{|\lambda| - 1} |x-y|$$

donc F est bien lipschitzienne.
Supposons enfin l'existence d'une autre fonction $G \in \mathcal{L}$ solution de (1). D'après la question 1 on a

$$G(x) = \lambda^{-n} G(x-na) - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} f(x-ka).$$

G est lipschitzienne donc d'après la question 5, $G(x-na) \underset{n\to+\infty}{=} O(n)$, ce qui prouve que $\lim_{n\to+\infty} \lambda^{-n} G(x-na) = 0$.
En passant à la limite on en déduit que $G(x) = F(x)$, ce qui assure l'unicité de F.

Question 12. $F_1(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{-n} = -\frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}} = \frac{1}{1-\lambda}$.

Question 13. $\lambda^{-n}\cos(x-na) = \lambda^{-n} \frac{e^{i(x-na)} + e^{-i(x-na)}}{2} = \frac{e^{ix}}{2}\left(\lambda^{-1} e^{-ia}\right)^n + \frac{e^{-ix}}{2}\left(\lambda^{-1} e^{ia}\right)^n$ donc

$$F_2(x) = \frac{e^{ix}}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda e^{ia}}\right) + \frac{e^{-ix}}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda e^{-ia}}\right) = \frac{e^{ix}(1+\lambda e^{-ia}) + e^{-ix}(1+\lambda e^{ia})}{2(1-2\lambda\cos a + \lambda^2)} = \frac{\cos x - \lambda \cos(x-a)}{1 - 2\lambda \cos a + \lambda^2}$$

Question 14. $f_3(x) = f_2(x + \pi/2)$ donc $F_3(x) = F_3(x+\pi/2) = \frac{\sin x - \lambda \sin(x-a)}{1 - 2\lambda\cos a + \lambda^2}$. On retrouve les mêmes expressions que celles obtenues aux questions 8-9-10.

Partie IV. Étude de (1) pour $|\lambda| = 1$

IV.1

Question 15. Pour $\lambda = 1$ la relation (1) s'écrit $F(x) - F(x+a) = f(x)$. Or si F est lipschitzienne on a $|f(x)| \leqslant K_F |a|$, ce qui impose à f d'être bornée.

Question 16.

a) Toute fonction a-périodique, par exemple $F : x \mapsto \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ vérifie $F(x) - F(x+a) = 0$.

b) Si $F \in \mathcal{L}$ est solution de (1) alors $x \mapsto F(x) + \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$ appartient à $\mathcal{L}$ (car somme de deux fonctions de $\mathcal{L}$) et est aussi solution de (1) donc il n'y a pas unicité de la solution dans $\mathcal{L}$ de (1).

Question 17.

a) Posons $F : x \mapsto \frac{\cos x - \cos(x-a)}{2(1-\cos a)}$. F est lipschitzienne car combinaison linéaire de deux fonctions lipschitziennes, et

$$F(x) - F(x+a) = \frac{\cos x - \cos(x-a) - \cos(x+a) + \cos x}{2(1-\cos a)} = \frac{2\cos x - 2\cos x \cos a}{2(1-\cos a)} = \cos x$$

donc F est solution de (1).

b) Supposons l'existence d'une solution $F \in \mathcal{L}$ de (1). D'après la relation (2) on a : $F(x) = F(x+na) + \sum_{k=0}^{n-1} \cos(x+ka)$. Mais $\cos a = 1$ donc $a \equiv 0 \mod (2\pi)$ et donc $\cos(x+ka) = \cos x$. Ainsi, $F(x) - F(x+na) = n\cos x$.
En particulier on a $F(na) = F(0) - n$ et $F(na+\pi) = F(\pi) + n$ donc $F(na+\pi) - F(na) = F(\pi) - F(0) + 2n$.
Cependant F est lipschitzienne donc $\left|F(na+\pi) - F(na)\right| \leqslant K_f \pi$ et ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|F(\pi) - F(0) + 2n| \leqslant K_f \pi$, ce qui devient absurde lorsque n tend vers $+\infty$. Il n'existe donc pas de solution dans $\mathcal{L}$ de (1).

IV.2

Question 18.

a) La fonction $F : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) - F(x+a) = 0$.

b) Si $F \in \mathcal{L}$ est solution de (1) alors $x \mapsto F(x) + \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ appartient aussi à $\mathcal{L}$ (car somme de deux fonctions lipschitziennes) et solution de (1) donc les solutions dans $\mathcal{L}$ de (1) ne sont pas uniques (s'il en existe).

Question 19.

a) Faisons tendre λ vers -1 dans F_2 ; on obtient la fonction $F : x \mapsto \frac{\cos x + \cos(x-a)}{2(1+\cos a)}$. Cette fonction est élément de $\mathcal{L}$ car combinaison linéaire de deux fonctions lipschitziennes, et :

$$F(x) + F(x+a) = \frac{\cos x + \cos(x-a) + \cos(x-a) + \cos a}{2(1+\cos x)} = \frac{2\cos x + 2\cos x \cos a}{2(1+\cos a)} = \cos x$$

donc F est solution de (1).

b) Supposons l'existence d'une solution $F \in \mathcal{L}$ de (1). On a $\cos(x - ka) = (-1)^k \cos x$ car $a \equiv \pi \mod (2\pi)$ donc d'après la relation (3) : $F(x) + F(x - na) = n\cos(x)$.
Ainsi, $F(-na) = n - F(0)$ et $F(-na+\pi) = -n - F(\pi)$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(-na+\pi) - F(-na) = -2na + F(0) - F(\pi)$, ce qui contredit le caractère lipschitzien de F (tout comme en 17.b).
Il n'existe donc pas de solution dans $\mathcal{L}$ de (1).

Question 20.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\big(f(x+n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère spécial relatif aux séries alternées la série $\sum (-1)^n f(x+n)$ converge.

b) Notons $F(x)$ la somme de cette série. On a :

$$F(x) + F(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+1+n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(x+n) - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f(x+n) = f(x)$$

donc F est solution de (1).
Toujours d'après le critère spécial, $|F(x)| \leqslant f(x)$ (le premier terme de la série) donc $\lim\limits_{+\infty} F(x) = 0$.
Pour montrer que F est lipschitzienne, considérons maintenant deux réels x et y tels que $x \leqslant y$ (pour fixer les idées).
On a $F(y) - F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \big(f(y+n) - f(x+n)\big) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_x^y -f'(t+n)\,\mathrm{d}t$ (on a $f' \leqslant 0$).
Puisque f' est croissante, $\int_x^y -f'(t+n)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^y -f'(t+n+1)\,\mathrm{d}t$ donc $F(y) - F(x)$ est la somme d'une série vérifiant les hypothèses du critère spécial ; on en déduit que $\big|F(y) - F(x)\big| \leqslant \big|f(y) - f(x)\big|$ et puisque f est lipschitzienne il en est de même de F.

Il reste à prouver l'unicité de F. Pour ce faire, considérons une autre solution $G \in \mathcal{L}$ de (1) telle que $\lim\limits_{+\infty} G(x) = 0$, et posons $H = F - G$. Alors $H \in \mathcal{L}$, $\lim\limits_{+\infty} H(x) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x) + H(x+1) = 0$.
Par récurrence on établit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(x) = (-1)^n H(x+n)$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ il vient $H(x) = 0$, donc $G = F$, ce qui assure l'unicité.