Matrices symétriques positives (CCP PC 2003)

Durée : libre

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la i^{e} ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.
Pour $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ dans $\mathbb{R}^p$ on note $(\mathrm{AX})_i$ le coefficient de la i^{e} ligne de AX.
Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.
La transposée d'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sera notée M^T.
Une matrice symétrique S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{E}), \quad \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{S}\mathrm{X} \geqslant 0$$

et définie positives et seulement si

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{E}), \quad \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{S}\mathrm{X} > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives, et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Partie I.

Question 1. Soit $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, et $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Établir les égalités :

a) $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^\mathrm{T}\mathrm{X}$;

b) $(\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{Y})^2 = \mathrm{X}^\mathrm{T}(\mathrm{Y}\mathrm{Y}^\mathrm{T})\mathrm{X} = \mathrm{Y}^\mathrm{T}(\mathrm{X}\mathrm{X}^\mathrm{T})\mathrm{Y}$;

c) $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{S}\mathrm{Y} = \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{S}\mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{S}\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle$.

Question 2. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall (\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) $\forall (\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) $\forall \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Question 3.

a) Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{S}\mathrm{X} = 0$. Montrer que toute valeur propre de S est nulle, et en déduire que $\mathrm{S} = 0$.

b) Donner un exemple de matrice carrée M d'ordre 3, non nulle et vérifiant : $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{M}\mathrm{X} = 0$.

Question 4.

a) Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

b) Que peut-on dire d'une matrice symétrique réelle semblable à une matrice symétrique réelle positive ?

Définition. — *Une* relation d'ordre *sur un ensemble* E *est une relation* $\geqslant$ *entre les éléments de* E *qui vérifie :*

- *pour tout* $x \in \mathrm{E}$, $x \geqslant x$ *(réflexivité) ;*
- *pour tout* $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $(x \geqslant y$ *et* $y \geqslant x) \implies x = y$ *(antisymétrie) ;*
- *pour tout* $(x,y,z) \in \mathrm{E}^3$, $(x \geqslant y$ *et* $y \geqslant z) \implies x \geqslant z$ *(transitivité).*

Si, de plus, on a pour tout $(x,y) \in \mathrm{E}^2$, $x \geqslant y$ *ou* $y \geqslant x$, *la relation d'ordre est dite* totale.

Question 5. On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\geqslant$ et $>$ définies respectivement par :

$$\forall (\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2, \qquad \mathrm{S}_1 \geqslant \mathrm{S}_2 \iff \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et

$$\forall (\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2, \qquad \mathrm{S}_1 > \mathrm{S}_2 \iff \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

a) Montrer que la relation $\geqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour $n \geqslant 2$ cet ordre n'est pas total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) La relation $>$ est-elle une relation d'ordre ?

d) Trouver un exemple dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ montrant que $\mathrm{S}_1 \geqslant \mathrm{S}_2$ et $\mathrm{S}_1 \neq \mathrm{S}_2$ n'implique pas nécessairement $\mathrm{S}_1 > \mathrm{S}_2$.

Question 6. Soient u et v deux endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $u \circ v = v \circ u$.

a) Démontrer que les sous-espaces propres de u sont stables par v.

b) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, et $\mathrm{E}_{\lambda_1}, \dots, \mathrm{E}_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres correspondants. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par v.
Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v. En déduire l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de u et v dans cette base soient toutes deux diagonales.

Question 7. Soit $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_2\mathrm{S}_1$. Montrer que $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Question 8.

a) Soit $(\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_2\mathrm{S}_1$. Montrer que :

$$\mathrm{S}_2 \geqslant \mathrm{S}_1 \geqslant 0 \implies \mathrm{S}_2^2 \geqslant \mathrm{S}_1^2$$

b) Montrer que les matrices $\mathrm{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vérifient $\mathrm{S}_2 \geqslant \mathrm{S}_1 \geqslant 0$. Vérifient-elles $\mathrm{S}_2^2 \geqslant \mathrm{S}_1^2$?

Partie II.

On se propose dans cette partie de caractériser de diverses manières la définie positivité d'une matrice symétrique réelle.

Question 9. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

(a) S est définie positive ;
(b) toutes les valeurs propres de S sont strictement positives ;
(c) il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$;
(d) S est positive et inversible.

Question 10. Soient A_n et B_n les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ données par :

$$\mathrm{B}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_n = 2\mathrm{I}_n - \mathrm{B}_n.$$

a) Montrer que pour tout vecteur $\mathrm{X} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{A}_n\mathrm{X} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 + x_n^2$$

b) En déduire que A_n est définie positive.

c) En cherchant une matrice M_n de la forme :

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$$

déterminer explicitement une matrice M_n inversible vérifiant : $A_n = M_n^T M_n$.

Question 11. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $S = M^T M$. On note $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ la famille des vecteurs colonnes de M. Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $X \in \mathbb{R}^n$ on note $p_i(X)$ la projection orthogonale de X sur $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_i)$.

a) Justifier que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On définit la famille de vecteurs $\mathcal{V} = (V_1, \dots, V_n)$ par les relations :

$$V_1 = U_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{2, \dots, n\}, \quad V_i = U_i - p_{i-1}(U_i).$$

Montrer que la famille $\mathcal{V}$ est orthogonale et que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $\mathcal{W} = (W_1, \dots, W_n)$ la famille de vecteurs définie par : $W_i = \dfrac{V_i}{\|V_i\|}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{W}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure.

d) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{W}$. Montrer que M peut s'écrire sous la forme : $M = PT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et qu'alors $S = T^T T$.

e) Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de la forme $S = T^T T$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible, et en déduire que S est symétrique définie positive.

Question 12.

a) Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $X^T A_0 X = 0$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si $\mathrm{tr}\, A > 0$ et $\det A > 0$, puis que ceci équivaut encore à : $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$.

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n \geqslant 2$. On décompose S sous la forme :

$$S = \begin{pmatrix} a & V^T \\ V & S' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R},\ V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ S' \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

En écrivant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour $a \neq 0$:

$$X^T S X = a\left(\left(x + \frac{1}{a} V^T X'\right)^2 + \frac{1}{a^2} X'^T \left(aS' - VV^T\right) X'\right)$$

et en déduire que S est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $aS' - VV^T$ est définie positive.

d) En gardant les notations de la question précédente, on peut alors construire par récurrence une suite de nombres réels $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et une suite de matrices $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ comme suit. On pose d'abord :

$$S_1 = S, \quad a_1 = a, \quad V_1 = V, \quad S_1' = S', \quad S_2 = a_1 S_1' - V_1 V_1^T$$

puis, si $n \geqslant 3$, on décompose S_2 sous la forme :

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & V_2^T \\ V_2 & S_2' \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_2 \in \mathbb{R},\ V_2 \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R}),\ S_2' \in \mathcal{S}_{n-2}(\mathbb{R})$$

On pose à nouveau $S_3 = a_2 S_2' - V_2 V_2^T$ et on itère le processus précédent. On obtient ainsi une suite de matrices symétriques réelles $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ où S_i est d'ordre $n+1-i$ et une suite de réels $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ liés par les relations :

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \qquad S_i = \begin{pmatrix} a_i & V_i^T \\ V_i & S_i' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_{i+1} = a_i S_i' - V_i V_i^T.$$

Le processus s'arrête pour $i = n$ car alors S_n est d'ordre 1 et on pose alors $S_n = (a_n)$.
Montrer que S est définie positive si et seulement si tous les réels de la suite $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont strictement positifs.

e) Soit $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Selon les notaions précédentes, déterminer explicitement les réels a_1, a_2, a_3 associés à cette matrice S, et en déduire que S est définie positive si et seulement si :

$$a > 0, \qquad \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0.$$

♦ ♦
♦