Corrigé : matrices symétriques positives (CCP PC 2003)

Partie I.

Question 1.

a) On a bien évidemment : $X^T Y = Y^T X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

b) D'après la question précédente, $(X^T Y)^2 = (X^T Y)(Y^T X) = X^T(YY^T)X$ et $(X^T Y)^2 = (Y^T X)(X^T Y) = Y^T(XX^T)Y$.

c) Par définition, $\langle X \mid Y\rangle = X^T Y$ donc : $X^T SY = X^T(SY) = \langle X \mid SY\rangle$ et $X^T SY = (S^T X)^T Y = \langle S^T X \mid Y\rangle = \langle SX \mid Y\rangle$ car S est symétrique.

Question 2.

a) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T S_1 X \geqslant 0$ et $X^T S_2 X \geqslant 0$ donc en ajoutant : $X^T(S_1+S_2)X \geqslant 0$, et $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) Même raisonnement avec une inégalité stricte.

c) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T(A^T A)X = (AX)^T(AX) = \langle AX \mid AX\rangle = \|AX\|^2 \geqslant 0$, et donc : $A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Question 3.

a) Si $SX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors : $X^T SX = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$, donc si $X^T SX = 0$ alors $\lambda = 0$.
Or S est une matrice diagonalisable car symétrique réelle donc S est semblable à la matrice nulle, ce qui impose $S = 0$.

b) Si M est une matrice antisymétrique, on a, puisque $X^T MX$ est un scalaire, $X^T MX = (X^T MX)^T = X^T M^T X = -X^T MX$ donc $X^T MX = 0$.

Question 4.

a) S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $SV_k = \lambda_k V_k$.

Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour tout vecteur $X = \sum_{k=1}^{n} y_k V_k$:

$$X^T SX = \langle X \mid SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} y_k V_k \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \geqslant 0$$

et donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Réciproquement, si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et si X un vecteur propre associé à une valeur propre λ, le calcul de la question 3.a donne : $X^T SX = \lambda\|X\|^2$, ce qui impose $\lambda \geqslant 0$.
On a donc démontré : $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$ (lorsque S est symétrique bien sûr).

Remarque. On démontrerait de même que : $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

b) Deux matrices semblables ont même spectre, donc d'après la question précédente, toute matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive est aussi positive.

Question 5.

a) Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\geqslant$ est bien :

- réflexive : $(0)_n$ est positive donc $S_1 \geqslant S_1$;
- antisymétrique : si $S_1 \geqslant S_2$ et si $S_2 \geqslant S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives donc nulles. Or $S_2 - S_1$ est diagonalisable (car symétrique réelle) donc c'est la matrice nulle, et $S_2 = S_1$.
- transitive : si $S_1 \geqslant S_2$ et $S_2 \geqslant S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après la question 2.a la somme $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_1 \geqslant S_3$.

b) Considérons la matrice $S_1 = 0$, et pour S_2 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une valeur propre négative. Alors S_1 et S_2 ne sont pas comparables : l'ordre ainsi défini n'est pas total.

c) La relation $>$ n'est pas réflexive car $0 \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

d) On considère $S_2 = 0$ et pour S_1 une matrice symétrique ayant des valeurs propres positives dont au moins une fois la valeur propre 0.

Question 6.

a) On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \implies v(x) \in E_\lambda(u)$. Et en effet, $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$ donc $v(x) \in E_\lambda(u)$.

b) L'endomorphisme induit par v sur un sous espace stable reste symétrique, donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une base orthonormée de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i. Or ces vecteurs sont aussi des vecteurs propres de u. Puisque u est diagonalisable car symétrique, la concaténation de ces différentes base forme une base orthonormée de E constituée de vecteurs qui sont à la fois vecteurs propres de u et de v.

Question 7. Notons déjà que S_1S_2 est symétrique car : $(S_1S_2)^T = S_2^TS_1^T = S_2S_1 = S_1S_2$. Par ailleurs, S_1 et S_2 sont diagonalisables (car symétriques réelles) et commutent, elles sont donc diagonalisables à l'aide d'une même matrice de passage orthogonale : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S_1 = PD_1P^T$ et $S_2 = PD_2P^T$, D_1 et D_2 étant diagonales. Mais alors $S_1S_2 = PD_1D_2P^T$, et les valeurs propres de S_1S_2 sont les éléments diagonaux de D_1D_2, c'est à dire le produit de valeurs propres de S_1S_2. Celles-ci étant positives, il en est donc de même de celles de S_1S_2, et $S_1S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Question 8.

a) Avec les notations précédentes, l'hypothèse : $S_2 \geqslant S_1 \geqslant 0$ se traduit par : $D_2 \geqslant D_1 \geqslant 0$, et, si on pose $D_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$ et $D_2 = \begin{pmatrix} d_1' & & \\ & \ddots & \\ & & d_n' \end{pmatrix}$, par : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $d_k' \geqslant d_k \geqslant 0$ (puisque les éléments diagonaux sont alors les valeurs propres). Mais alors on a aussi : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, ${d_k'}^2 \geqslant d_k^2 \geqslant 0$, soit $D_2^2 \geqslant D_1^2$, puis finalement : $S_2^2 \geqslant S_1^2$.

b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; ses valeurs propres 0 et 5/2 sont des réels positifs, donc $S_2 \geqslant S_1$.

S_1 à pour valeurs propres 0 et 1, donc $S_1 \geqslant 0$.

Mais $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ a pour déterminant $-9/4$; c'est le produit des valeurs propres, donc l'une d'entre elles est négative, et $S_2^2 - S_1^2$ n'est donc pas positive.

Partie II.

Question 9. L'équivalence $(a) \iff (b)$ a déjà été justifiée à la question 4.a.

Montrons que $(b) \implies (c)$. S étant diagonalisable dans une base orthonormée on peut écrire $S = PDP^T$. Par hypothèses les éléments diagonaux d_i (les valeurs propres de A) sont strictement positifs. On peut donc définir :

$$D' = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}.$$

La matrice $M = D'P^T$ est alors inversible et vérifie : $S = M^TM$.

Montrons que $(c) \implies (d)$. Si $S = M^TM$ avec M inversible, S est inversible (comme produit de matrices inversibles) et S est positive d'après la question 2.c.

Montrons enfin que $(d) \implies (b)$. Si S est positive toutes ses valeurs propres sont positives, et si S est inversible ses valeurs propres ne sont pas nulles. Ses valeurs propres sont donc strictement positives.

Tout ceci assure l'équivalence de ces quatre propositions.

Question 10.

a) Si $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $Y = AX = (y_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ y_j = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \quad \text{pour } 2 \leqslant j \leqslant n-1 \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc :

$$
\begin{aligned}
X^T AX &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\\
&= \Big(x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\Big) - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\\
&= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2) = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2.
\end{aligned}
$$

b) Pour tout vecteur X on constate que $X^T A_n X$ est une somme de carrés donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si $x_1 = x_n = 0$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $x_{i+1} - x_i = 0$, soit $X = 0$. A_n est donc bien définie positive.

c) Avec la matrice M_n du sujet calculons $S = M^T M$. On obtient :

$$
\begin{cases}
s_{1,1} = u_1^2\\
s_{i,i} = u_i^2 + v_{i-1}^2 \quad (2 \leqslant i \leqslant n)\\
s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1)\\
s_{i,j} = 0 \quad (\text{sinon})
\end{cases}
$$

On doit donc résoudre le système (non linéaire) :

$$
\begin{cases}
u_1^2 = 2\\
u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \quad (2 \leqslant i \leqslant n)\\
u_i v_i = -1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1)
\end{cases}
$$

Ceci impose $v_i = -\dfrac{1}{u_i}$ et en reportant, $u_i^2 = 2 - \dfrac{1}{u_{i-1}^2}$. En posant $a_i = u_i^2$ on obtient les relations :

$$
\begin{cases}
a_1 = 2\\
a_i = 2 - \dfrac{1}{a_{i-1}}
\end{cases}
$$

Les calculs des premiers termes permettent de postuler, puis aisément de démontrer que : $a_i = \dfrac{i+1}{i}$. D'où : $u_i = \sqrt{\dfrac{i+1}{i}}$ et $v_i = -\sqrt{\dfrac{i}{i+1}}$.

Question 11.

a) $\mathcal{U}$ est une base car M est une matrice inversible.

b) Il suffit de constater qu'il s'agit de la méthode d'orthogonalisation de Schmidt : on démontre alors par récurrence que $\mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_i) = \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_i)$. Dans ces conditions, $\mathcal{V}$ est une base et $V_i \in \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_{i-1})^\perp = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_{i-1})^\perp$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{V}$ est orthogonale.

c) Nous venons de voir que $V_k \in \mathrm{Vect}(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, ce qui se traduit par le fait que $\mathrm{M}at_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ est triangulaire supérieure ; il en est donc de même de son inverse $\mathrm{M}at_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$.

d) Notons $\mathcal{B}$ la base canonique. On a $M = \mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \mathrm{M}at_{\mathcal{B}}(\mathcal{W})\mathrm{M}at_{\mathcal{W}}(\mathcal{U}) = PT$, où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.
On a alors $S = M^T M = T^T P^T P T$. Mais P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{W}$, toutes deux bases orthonormées ; ainsi P est orthogonale et $P^T P = I_n$, et $S = T^T T$.

e) Un calcul laborieux permet d'obtenir : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On constate que T est inversible et donc (d'après la question 9) S est définie positive.

Question 12.

a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on calcule $X^T A_0 X = by^2 + 2cxy$ donc $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

b) A est symétrique donc diagonalisable. A est donc définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives, ce qui a lieu si et seulement si leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont.
A est donc définie positive si et seulement $a+b>0$ et $ab-c^2>0$. Remarquons alors que la deuxième condition impose à a et b d'être de même signe. Ainsi, A est définie positive si et seulement $a>0$ et $ab-c^2>0$.

c) Un calcul par bloc donne :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & X'^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & V^T \\ V & S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= xax + xX'^T V' + xV^T X' + X'^T S' X' = ax^2 + x(V^T X' + X'^T V) + X'^T S' X' \\
&= ax^2 + 2xV^T X' + X'^T S' X' \qquad (\text{car } V^T X' = X'^T V \text{ d'après 1.a}) \\
&= a\Big(x + \frac{V^T X'}{a}\Big)^2 - \frac{1}{a}(V^T X')^2 + X'^T S' X' \\
&= a\Big(x + \frac{V^T X'}{a}\Big)^2 - \frac{1}{a}(X'^T V V^T X') + X'^T S' X' \qquad (\text{d'après 1.b}) \\
&= a\bigg(\Big(x + \frac{V^T X'}{a}\Big)^2 + \frac{1}{a^2} X'^T\big(aS' - VV^T\big)X'\bigg)
\end{aligned}$$

On en déduit :

- si $a>0$ et $aS'-VV^T$ est définie positive, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\Big(x+\dfrac{V^T X'}{a}\Big)^2 \geqslant 0$ et $X'^T(aS'-VV^T)X' \geqslant 0$ donc $X^T S X \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x + \dfrac{V^T X'}{a} = 0$ et $X'=0$, soit $X = \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} = 0$. S est donc bien définie positive.
- Réciproquement, si S est définie positive alors $a>0$ car pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X^T S X = a$, et $aS'-VV^T$ est définie positive car pour tout vecteur non nul $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, on obtient en prenant $X = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$: $X'^T(aS'-VV^T)X' = a^2 X^T S X > 0$.

d) Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i<n$. Enfin $a_n>0$ comme valeur propre de la matrice S_n définie positive.
Réciproquement, si les (a_i) sont tous strictement positifs $S_n = (a_n)$ est définie positive. S_n est définie positive et $a_{n-1}>0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1}>0$.

e) On a ici : $a_1 = a$, $V_1 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, $S_1' = \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$, et $S_2 = \begin{pmatrix} ab-d^2 & af-de \\ af-de & ac-e^2 \end{pmatrix}$.
S est donc définie positive si et seulement si $a>0$ et S_2 définie positive. En utilisant la question 12.b cette condition est équivalente à : $a>0$, $ab-d^2>0$ et $\det S_2>0$. Or $\det S_2 = (ab-d^2)(ac-e^2)-(af-de)^2 = a\det S$, donc S est définie positive si seulement si :

$$a>0, \qquad \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0, \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0.$$