Polynômes de Legendre (CCP PC 2018)

Durée : libre

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$.
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I – Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Q3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1,1]$.
On les note $x_1, \dots, x_n$ en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.
On pose alors $A_0 = 1$ et $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ pour $n \geqslant 1$ de sorte que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II – Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions 8 à 13, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable. *On pourra utiliser la question 9.*

Q11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question 11, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée. *On pourra utiliser la question 12.*

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P \mid Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie III – Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15. Justifier que $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$

Q16. Établir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \phi(P) \mid Q \rangle = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$ puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \langle \phi(P) \mid Q \rangle = \langle P \mid \phi(Q) \rangle$$

Q17. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. *On pourra utiliser la question 13.*

Q18. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\quad \langle P \mid L_n \rangle = 0$.

Q19. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P-Q\|$ la distance de P au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$d(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(P)^2, \text{ où } c_k(P) = \langle P \mid Q_k \rangle$$

Q21. Prouver que la série $\sum c_k(P)^2$ converge et que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k(P)^2 \leqslant \|P\|^2$.

Partie IV – Fonction génératrice

On admet dans la suite du problème que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$ et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$. On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

Q22. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$. *On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.*

Q23. Pour $x \in [-1,1]$, on note $\mathrm{R}(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{L}_n(x)t^n$. Montrer que : $\mathrm{R}(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

Q24. Pour $x \in [-1,1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $\mathrm{S}_x(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{L}_n(x)t^n$. Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1-2tx+t^2)y' + (t-x)y = 0$$

Q25. En déduire que : $\forall x \in [-1,1], \forall t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{L}_n(x)t^n = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.

Q26. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question 25, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2.

Partie V – Expression intégrale des polynômes de Legendre

Pour $\theta \in [0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n \,\mathrm{d}u$.

Q27. Soit $t \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction v_n de $[-\pi,\pi]$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $v_n(u) = t^n(\cos\theta + i\sin\theta\cos u)^n$. Montrer que $\sum v_n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$.

Q28. Justifier l'égalité : $\forall t \in]-1,1[, \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\mathrm{d}u}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u}$.

Dans les question 29 et 30, a désigne un réel strictement positif.

Q29. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \dfrac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 0$. *On pourra utiliser un changement de variable défini par* $v = \pi - u$.

Q30. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \dfrac{\mathrm{d}u}{1+a^2\cos^2 u} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. *On pourra utiliser le changement de variable défini par* $u = \arctan v$.

Q31. En déduire que :

$$\forall t \in]-1,1[, \forall \theta \in [0,\pi], \quad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1-t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2-2t\cos\theta+1}}$$

Q32. Déduire de ce qui précède que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\mathrm{L}_n(\cos\theta) = w_n(\theta)$.

Q33. Justifier que : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall t \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{L}_n(x)t^n = \dfrac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}$.

Q34. Prouver que : $\forall x \in [-1,1]$, $\mathrm{R}(x) = 1$. *On pourra raisonner par l'absurde et montrer qu'alors, pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}(x)$, on a* $(z^2-2xz+1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{L}_n(x)z^n\right)^2 = 1$.

Partie VI – Application à l'approximation d'intégrales

Dans les question 35 à 43, n désigne un entier naturel non nul.

Q35. Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{2n-1}$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $2n$ réels $t_1 < \cdots < t_{2n}$ vérifiant : $\forall i \in [\![1,2n]\!]$, $h(t_i) = 0$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $h^{(2n-1)}(c) = 0$.

Q36. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note ℓ_i l'application linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, par : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, $\ell_i(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(x_i)$ (on rappelle que $x_1,\ldots,x_n$ désignent les racines de L_n et qu'elles sont deux à deux distinctes). Montrer que $(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}],\mathbb{R})$.

Q37. En déduire que pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell_k$.

Q38. Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ de réels tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)\,dt = \alpha_1 P(x_1) + \dots + \alpha_n P(x_n)$$

Q39. Montrer que la relation de la question 38 reste vérifiée pour tout P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. *On pourra, pour* $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[x]$, *utiliser la division euclidienne de* P *par* L_n *et la question 18.*

Dans la suite du problème, f désigne une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$.

Q40. Montrer que : $\exists! H_n \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \forall i \in [\![1,n]\!], \begin{cases} H_n(x_i) = f(x_i) \\ H_n'(x_i) = f'(x_i) \end{cases}$

On pourra commencer par déterminer le noyau de l'application linéaire de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ *dans* $\mathbb{R}^{2n}$ *qui à* P *associe :*

$$(P(x_1),\dots,P(x_n),P'(x_1),\dots,P'(x_n))$$

On rappelle que A_n a été défini à la question 6.

Q41. Soit $x \in [-1,1]$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x \neq x_i$.

Montrer que : $\exists c \in [-1,1]$, $f(x) - H_n(x) = \dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$. *On pourra utiliser l'application* g *définie sur* $[-1,1]$ *par* $g(t) = f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!}K$, *où* K *est un réel dépendant de* x *à préciser, et appliquer le résultat de la question 35 à la fonction* g'.

Q42. Montrer que : $\forall y \in [-1,1], \exists c \in [-1,1], f(y) - H_n(y) = \dfrac{A_n(y)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c)$.

Q43. Justifier l'existence de $M_{2n}(f) = \max_{t \in [-1,1]} |f^{(2n)}(t)|$, puis prouver que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(t)\,dt - (\alpha_i f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)) \right| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n(t)^2\,dt$$

Q44. Déterminer un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\int_{-1}^{1} A_n(t)^2\,dt$.

♦ ♦
♦