Corrigé : polynômes, matrices et systèmes différentiels stables (CCP PC 2014)

Partie I : stabilité dans des cas particuliers

I. 1. On a $P = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$ et en identifiant : $a = -(z_1 + z_2)$ et $b = z_1 z_2$.

I. 2.

I.2.a. $\Delta > 0$ donc les deux racines z_1 et z_2 de P sont réelles. Si de plus P est stable alors a et b sont deux réels strictement négatifs. Ainsi, $a = -(z_1 + z_2) > 0$ et $b = z_1 z_2 > 0$.

I.2.b. Réciproquement, si $a > 0$ et $b > 0$ alors $\sqrt{\Delta} < a$ donc $z_1 = \dfrac{-a + \sqrt{\Delta}}{2} < 0$ et bien évidemment $z_2 = \dfrac{-a - \sqrt{\Delta}}{2} < 0$ donc P est stable.

I. 3. Observons déjà que $\Delta = 0 \iff 4b = a^2$ donc $b \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $a = 0$.
Ici P possède une racine double réelle $z_1 = z_2 = -a/2$ donc P est stable si et seulement si $a > 0$, soit encore si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ compte tenu de la remarque préliminaire.

I. 4.

I.4.a. P est un polynôme réel de degré 2 sans racine réelle donc ses deux racines sont complexes conjuguées.

I.4.b. On a $\mathfrak{Re}(z_1) = \mathfrak{Re}(z_2) = -a/2$ donc P est stable si et seulement si $a > 0$. Cependant, la condition $\Delta < 0$ équivaut à $4b > a^2$ donc on a $b \geqslant 0$, et même $b > 0$ lorsque $a \neq 0$. On en déduit que P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$.

I. 5.

I.5.a. $\chi_A(x) = x^2 - (\operatorname{tr} A)x + (\det A)$.

I.5.b. Les questions I.2, I.3 et I.4 ont montré que le polynôme P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$, donc la matrice A est stable si et seulement si $-\operatorname{tr} A > 0$ et $\det A > 0$, soit pour $n = 2$, $\operatorname{tr} A < 0$ et $(-1)^n \det A > 0$.
On verra dans la question suivante que cette condition n'est pas suffisante en dimension 3.

I. 6.

I.6.a. -1 est racine évidente de Q, ce qui permet de factoriser : $Q = (X-1)(X^2+1) = (X-1)(X-i)(X+i)$.

I.6.b. $\operatorname{tr} B = -1$ et $\det B = -1$ donc $(-1)^n \det B = 1 > 0$.

I.6.c. Q n'est pas stable car chacune de ses racines a une partie réelle positive ou nulle.
On calcule $\chi_B = Q$ donc B n'est pas stable non plus.

Partie II : Norme subordonnée et mesure de Lozinskii

II. 1.

II.1.a. Une norme sur $\mathbb{K}^n$ est une application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés :

- $N(x) = 0 \implies x = 0$;
- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}^n$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

II.1.b. L'application $x \mapsto Ax$ est linéaire donc continue ; l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne (d'après la seconde inégalité triangulaire) donc continue ; par composition l'application $x \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

II.1.c. $\mathcal{B}$ est fermé et borné donc la fonction continue $x \mapsto \|Ax$ y est bornée et atteint ses bornes en un point $x_0 \in \mathcal{B}$.

II.1.d. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $\|I_n x\| = \|x\| = 1$ donc $|||I_n||| = 1$.

II.1.e. Si $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ alors $\dfrac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}$ donc $\left\| \dfrac{Ax}{\|x\|} \right\| \leqslant |||A|||$ et ainsi $\|Ax\| \leqslant |||A||| \cdot \|x\|$, inégalité qui reste vraie pour $x = 0$.

II.1.f. Pour tout $x \in \mathcal{B}$, $Ax = (A-B)x + Bx$ donc $\|Ax\| \leqslant \|(A-B)x\| + \|Bx\| \leqslant |||A-B||| + |||B|||$. Une borne supérieure est le plus petit des majorants donc $|||A||| \leqslant |||A-B||| + |||B|||$.
Pour tout $x \in \mathcal{B}$ on a d'après II.Ie : $\|ABx\| \leqslant |||A||| \cdot \|Bx\|$; mais $\|Bx\| \leqslant |||B|||$ donc $\|ABx\| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$. La borne supérieure est le plus petit des majorants donc $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

II. 2. Posons $\lambda = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$|1+u\lambda| = \sqrt{(1+au)^2 + b^2u^2} = \sqrt{1+2au+(a^2+b^2)u^2} \underset{0^+}{=} \sqrt{1+2au+\mathrm{o}(u)} \underset{0+}{=} 1 + au + \mathrm{o}(u)$$

donc $\lim\limits_{u\to 0+} \dfrac{|1+au|-1}{u} = a = \mathfrak{Re}(\lambda)$.

II. 3.

II.3.a. $\mu(\mathrm{A},u) = \dfrac{|||u(u^{-1}\mathrm{I}_n + \mathrm{A})||| - 1}{u} = |||u^{-1}\mathrm{I}_n + \mathrm{A}||| - u^{-1}$; la formule demandée en résulte immédiatement.

II.3.b. D'après II.1f, $|||u^{-1}\mathrm{I}_n + \mathrm{A}||| - |||v^{-1}\mathrm{I}_n + \mathrm{A}||| \leqslant |||(u^{-1}-v^{-1})\mathrm{I}_n||| = (u^{-1}-v^{-1})|||\mathrm{I}_n||| = u^{-1}-v^{-1}$ car $u^{-1}-v^{-1} \geqslant 0$ et $|||\mathrm{I}_n||| = 1$ (question II.1d). En conséquence, $\mu(\mathrm{A},u) - \mu(\mathrm{A},v) \leqslant 0$.

II.3.c. D'après l'inégalité triangulaire, $|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}||| \leqslant |||\mathrm{I}_n||| + u|||\mathrm{A}||| = 1 + u|||\mathrm{A}|||$ donc $\mu(\mathrm{A},u) \leqslant |||\mathrm{A}|||$.
D'après II.1f, $|||\mathrm{I}_n||| - |||(-u)\mathrm{A}||| \leqslant |||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||$ donc $|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|| \geqslant 1 - u|||\mathrm{A}|||$. IL en résulte que $\mu(\mathrm{A},u) \geqslant -|||\mathrm{A}|||$.

II.3.d. D'après II.3b la fonction $u \mapsto \mu(\mathrm{A},u)$ est croissante sur $]0,+\infty[$; d'après II.3d elle est minorée (et majorée) donc elle possède une limite finie en 0^+.

II. 4.

II.4.a. Soit y un vecteur propre pou la valeur propre λ. On a $y \neq 0$ donc on peut poser $x = \dfrac{y}{\|y\|}$ et on a ainsi $\|x\| = 1$ et $\mathrm{A}x = \lambda x$.
Dans ce cas, $\|(\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})x\| = \|(1+u\lambda)x\| = |1+u\lambda|\cdot\|x\| = |1+u\lambda|$.

II.4.b. De ceci il résulte que $|1+u\lambda| \leqslant |||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||$ donc $\dfrac{|1+u\lambda-1}{u} \leqslant \mu(\mathrm{A},u)$. En faisant tendre u vers 0^+ la question II.2 donne : $\mathfrak{Re}(\lambda) \leqslant \mu(\mathrm{A})$.

II.4.c. La question précédente montre que lorsque $\mu(\mathrm{A}) < 0$, toute valeur propre complexe de A vérifie $\mathfrak{Re}(\lambda) < 0$ donc A est stable.

Partie III : Normes et mesures de Lozinskii associées

III. 1. $\|(\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})x\|_2^2 = \|x + u\mathrm{A}x\|_2^2 = (\mathrm{X}+u\mathrm{AX})^{\mathrm{T}}(\mathrm{X}+u\mathrm{AX}) = (\mathrm{X}^{\mathrm{T}} + u\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}})(\mathrm{X}+u\mathrm{AX}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + u\mathrm{X}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}+\mathrm{A}^{\mathrm{T}})\mathrm{X} + u^2\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}$.

III. 2. La matrice $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{A}$ est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée : il existe donc $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{A} = \mathrm{M}\,\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$.

III. 3.

III.3.a. Posons $y = (y_1,\ldots,y_n)$. Alors $\|y\|_2^2 = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{\mathrm{T}}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \|x\|_2^2 = 1$ car $\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^n y_i^2 = 1$.

III.3.b. Posons $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. Alors $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{A})\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{MDM}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = (\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})^{\mathrm{T}}\mathrm{D}(\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2$. Il reste à appliquer III.1 pour conclure.

III.3.c. L'ensemble $\mathcal{B} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\| = 1\right\}$ est fermé et borné et l'application $x \mapsto \|\mathrm{A}x\|^2$ continue sur $\mathcal{B}$ donc cette application est bornée. En notant γ et δ les bornes inférieure et supérieure on en déduit que pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \mathrm{I}_n$ on a $\gamma \leqslant \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} \leqslant \delta$.

III.3.d. En utilisant III.3b on obtient pour $x \in \mathcal{B}$ la majoration

$$\|(\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})x\|_2^2 \leqslant 1 + u\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i^2 + \delta u^2 \leqslant 1 + u\alpha_1\sum_{i=1}^n y_i^2 + \delta u^2 = 1 + u\alpha_1 + \delta u^2$$

puis en passant à la borne supérieure : $|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_2^2 \leqslant 1 + u\alpha_1 + \delta u^2$.
Pour la minoration c'est légèrement différent : on pose $x = \mathrm{M}y$ avec $y = (1,0,\ldots,0)$. Alors $x \in \mathcal{B}$ et pour cet x particulier on a : $1 + \alpha_1 u + \delta u^2 \leqslant \|(\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})x\|_2^2 \leqslant |||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_2$, ce qui donne l'encadrement demandé.

III.3.e. Cet encadrement permet d'en déduire que $|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_2 \underset{0}{=} 1 + \dfrac{\alpha_1}{2}u + \mathrm{o}(u)$ et donc :

$$\mu_2(\mathrm{A}) = \lim_0\left(\frac{|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_2 - 1}{u}\right) = \frac{\alpha_1}{2}$$

Par ailleurs, α_1 est la plus grande des valeurs propres des $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} + \mathrm{A}$ donc $\dfrac{\alpha_1}{2} = \max\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}\left(\dfrac{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{A}}{2}\right)$.

III. 4.

III.4.a. Notons $\mathcal{B}_{\mathrm{H}}$ la boule unité associée à la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{H}}$: $\mathcal{B}_{\mathrm{H}} = \left\{x \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \|\mathrm{H}x\|_2 = 1\right\}$.
Pour tout $x \in \mathcal{B}_{\mathrm{H}}$, $\|\mathrm{A}x\|_{\mathrm{H}} = \|\mathrm{HA}x\|_2 = \|\mathrm{HAH}^{-1}y\|_2$ en posant $y = \mathrm{H}x$. Mais $y \in \mathcal{B}_2$ donc $\|\mathrm{HAH}^{-1}y\|_2 \leqslant |||\mathrm{HAH}^{-1}|||_2$.
On a ainsi montré que pour tout $x \in \mathcal{B}_{\mathrm{H}}$, $\|\mathrm{A}x\|_{\mathrm{H}} \leqslant |||\mathrm{HAH}^{-1}|||_2$; en passant à la borne supérieure on a prouvé que $|||\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}} \leqslant |||\mathrm{HAH}^{-1}|||_2$.
Réciproquement, soit $y \in \mathcal{B}_2$. On a $\|\mathrm{HAH}^{-1}y\|_2 = \|\mathrm{AH}x\|_2 = \|\mathrm{A}x\|_{\mathrm{H}}$ en posant $x = \mathrm{H}^{-1}y$. On a $\|x\|_{\mathrm{H}} = \|y\|_2 = 1$ donc $x \in \mathcal{B}_{\mathrm{H}}$ et ainsi $\|\mathrm{A}x\|_{\mathrm{H}} \leqslant |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}}$.
On a prouvé que pour tout $y \in \mathcal{B}_2$, $\|\mathrm{HAH}^{-1}y\|_2 \leqslant |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}}$ et en passant à la borne supérieure : $|||\mathrm{HAH}^{-1}|||_2 \leqslant |||\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}}$. D'où l'égalité.

III.4.b. En particulier, $|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}} = |||\mathrm{H}(\mathrm{I}_n + u\mathrm{A})\mathrm{H}^{-1}|||_2 = |||\mathrm{I}_n + u\mathrm{HAH}^{-1}|||_2$ donc

$$\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}) = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{A}|||_{\mathrm{H}} - 1}{u}\right) = \lim_{u\to 0^+}\left(\frac{|||\mathrm{I}_n + u\mathrm{HAH}^{-1}|||_2 - 1}{u}\right) = \mu_2(\mathrm{HAH}^{-1})$$

Partie IV : Un critère de stabilité en degré 3

IV. 1. On développe :

$$(\mathrm{X} - z_1)(\mathrm{X} - z_2)(\mathrm{X} - z_3) = \mathrm{X}^3 - (z_1 + z_2 + z_3)\mathrm{X}^2 + (z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)\mathrm{X} - z_1z_2z_3$$

puis on identifie : $z_1 + z_2 + z_3 = -a$, $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = b$, $z_1z_2z_3 = -c$. On calcule ensuite :

$$ab - c = z_1z_2z_3 - (z_1 + z_2 + z_3)(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = -2z_1z_2z_3 - z_1^2z_2 - z_1^2z_3 - z_2^2z_1 - z_2^2z_3 - z_3^3z_1 - z_3^2z_2$$

IV. 2. On a $\lim\limits_{-\infty}\mathrm{P}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty}\mathrm{P}(x) = +\infty$ et une fonction polynomiale étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires pour l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{P}(x) = 0$.

IV. 3.

IV.3.a. z_2 et z_3 sont racines conjuguées sont $\beta_3 = -\beta_2 = 0$.

IV.3.b. Ainsi, les trois racines z_1, z_2 et z_3 sont réelles, donc strictement négatives lorsque P est stable. Les expressions obtenues à la question IV.1 donnent alors les inégalités suivants : $a > 0$, $b > 0$, > 0 et $ab - c > 0$ donc P vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

IV. 4.

IV.4.a. On l'a déjà dit : z_2 et z_3 sont conjuguées l'une de l'autre donc $\alpha_3 = \alpha_2$ et $\beta_3 = -\beta_2$.

IV.4.b. Ainsi, $z_2 + z_3 = 2\alpha_2$ donc $a = -(\alpha_1 + 2\alpha_2)$, $b = z_1(z_2 + z_3) + z_2z_3 = \alpha_1(2\alpha_2) + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)$, $c = -\alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2)$ et

$$ab - c = \alpha_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1 + 2\alpha_2)(2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) = -2\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 4\alpha_1\alpha_2^2$$

IV.4.c. Si P est stable alors $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 < 0$ et les expressions précédentes donnent $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$ donc P vérifie $\mathcal{H}$.

IV. 5. Notons que les relations obtenues aux questions IV.4a et IV.4b restent valables dans le cas où $\beta_2 = 0$; on peut donc utiliser les formules du IV.4b.
Si P vérifie $\mathcal{H}$ on a $c > 0$, ce qui impose déjà $\alpha_1 < 0$, soit $\mathfrak{Re}(z_1) < 0$.
Supposons $\alpha_2 = 0$. Alors $ab - c = 0$ donc P ne vérifie pas $\mathcal{H}$. Par contraposée, si P vérifie $\mathcal{H}$ alors $\alpha_2 = \mathfrak{Re}(z_2) = \mathfrak{Re}(z_3) \neq 0$.

IV. 6.

IV.6.a. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\chi_{\mathrm{A}'}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ c' & x & -1 \\ 0 & b' & x + a' \end{vmatrix} = b'x + (x + a')(x^2 + c') = x^3 + a'x^2 + (b' + c')x + a'c' = x^3 + ax^2 + bx + c = \mathrm{P}(x)$$

IV.6.b. On calcule $\mathrm{B}' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c'} & 0 \\ -\sqrt{c'} & 0 & \sqrt{b'} \\ 0 & -\sqrt{b'} & -a' \end{pmatrix}$ donc $\dfrac{\mathrm{B}^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$.

IV.6.c. On applique la question III.3e : $\mu_2(\mathrm{B}')$ est la plus grande des valeurs propres de $\dfrac{\mathrm{B}'^{\mathrm{T}} + \mathrm{B}'}{2}$, à savoir $\mu_2(\mathrm{B}') = 0$ puisque $-a \leqslant 0$. Puis on applique la question III4b pour conclure : $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}') = \mu_2(\mathrm{B}') = 0$.

IV.6.d. Le résultat principal de la partie II a consisté à montrer que quelle que soit la norme utilisée, et donc en particulier pour $\|\cdot\|_{\mathrm{H}}$, on a $\mathfrak{Re}(\lambda) \leqslant \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{A}')$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{A}')$. La matrice A′ est donc stable, et puisque son polynôme caractéristique est égal à P, on peut en conclure que le polynôme P est stable.

Partie V : EXEMPLE DE SYSTÈME DIFFÉRENTIEL STABLE

V. 1. On calcule $\det(\lambda I_3 - C) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$.

V. 2. Avec les notations de la partie IV, $a = 2 > 0$, $b = 3 > 0$, $c = 4 > 0$ et $ab - c = 2 > 0$ donc χ_C vérifie la propriété $\mathcal{H}$. Ainsi, C est stable.

V. 3. $\chi'_C(x) = 3x^2 + 4x + 3$. Ce polynôme n'a pas de racine réelle donc χ'_C reste de signe constant, donc strictement positif. On en déduit que χ_C est strictement croissant donc ne possède qu'une racine réelle α_1 et deux racines complexes conjuguées $\alpha_2 \pm i\beta_2$. Enfin, puisque C est stable ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative, soit : $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 < 0$.
Il reste à observer que C, possédant trois valeurs propres simples, est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour justifier l'existence de U.

V. 4.

V.4.a. $X' = CX \iff X' = UDU^{-1}X \iff U^{-1}X' = DU^{-1}X \iff (U^{-1}X)' = D(U^{-1}X) \iff Y' = DY$.

V.4.b. Si on pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} y_1' = \alpha_1 y \\ y_2' = (\alpha_2 + i\beta_2)y_2 \\ y_3' = (\alpha_2 - i\beta_2)y_3 \end{cases}$. On résout : $\begin{cases} y_1(t) = \lambda_1 e^{\alpha_1 t} \\ y_2(t) = \lambda_2 e^{(\alpha_2 + i\beta_2)t} \\ y_3(t) = \lambda_3 e^{(\alpha_2 - i\beta_2)t} \end{cases}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$.

V.4.c. Posons $Y_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ -\lambda_3 \end{pmatrix}$. Alors $Y(t) = e^{\alpha_1 t} Y_1 + e^{\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t)Y_2 + e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t)Y_3$ et

$$X(t) = e^{\alpha_1 t} X_1 + e^{\alpha_2 t}\cos(\beta_2 t)X_2 + e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t)X_3 \quad \text{en posant } X_i = UY_i$$

A priori les trois matrices X_i sont à valeurs complexes. Cependant, puisque X est à valeurs réelles on peut obtenir :

- pour $t = 0$ et $t = \dfrac{2\pi}{\beta_2}$ le système : $\begin{cases} X_1 + X_2 = X(0) \in \mathbb{R}^3 \\ \exp\left(\dfrac{2\pi\alpha_1}{\beta_2}\right)X_1 + \exp\left(\dfrac{2\pi\alpha_2}{\beta_2}\right)X_2 = X\left(\dfrac{2\pi}{\beta_2}\right) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$ qui prouve en le résolvant que X_1 et X_2 sont à valeurs réelles ;
- pour $t = \dfrac{\pi}{2\beta_2}$ la relation : $\exp\left(\dfrac{\pi\alpha_1}{2\beta_2}\right)X_1 + \exp\left(\dfrac{\pi\alpha_2}{2\beta_2}\right)X_3 = X\left(\dfrac{\pi}{2\beta_2}\right) \in \mathbb{R}^3$ qui prouve que $X_3 \in \mathbb{R}^3$.

V.4.d. Puisque $\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 < 0$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha_1 t} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{\alpha_2 t} = 0$. les fonctions cos et sin sont bornées donc $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$. Le système (S) est stable.