Corrigé : forme normale pour un vecteur propre (CCP PC 2013)

Partie I : étude dans un cas particulier

I. 1.

I.1.a. Le polynôme caractéristique de A vaut (après calcul) $(X-1)^2(X+2)$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, -2\}$.

I.1.b. Si (e) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, on a $\det_{(e)}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ donc (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.
On calcule $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ et $Au_3 = -2u_3$ donc cette base est bien constituée de vecteurs propres de A.

I.1.c. Il existe une base formée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable.

I.1.d. On calcule $Bu_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Bu_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Bu_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Pour chacune des valeurs de $i \in \{1, 2, 3\}$ on a pas $Bu_i \in \mathrm{Vect}(u_i)$, donc aucun des u_i n'est vecteur propre de B.

I. 2.

I.2.a. Le polynôme caractéristique de B vaut (après calcul) $(X-2)^3$ donc $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$.

I.2.b. $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Im}(B-2I)$. Or $B-2I = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de rang 1, toutes ses colonnes étant proportionnelles à u_4. Ainsi, $\mathrm{Im}_2(B) = \mathrm{Vect}(u_4)$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim E_2(B) = 3 - \dim \mathrm{Im}_2(B) = 2$.

I.2.c. 2 est la seule valeur propre de B donc la somme des dimensions des sous-espaces propres, égale à 2, est strictement inférieure à $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$: B n'est pas diagonalisable.

I. 3.

I.3.a. D'après la question I.1, $\dim E_1(A) = 2$; d'après la question I.2, $\dim E_2(B) = 2$. Ainsi, $\dim E_1(A) \cap E_2(B) \in \{0, 1, 2\}$.
On calcule $Au_5 = u_5$ et $Bu_5 = 2u_5$ donc $\mathrm{Vect}(u_5) \subset E_1(A) \cap E_2(B)$, et $\dim E_1(A) \cap E_2(B) \in \{1, 2\}$.
Or $E_1(A) \neq E_2(B)$ car $u_1 \in E_1(A) \setminus E_2(B)$, donc $\dim E_1(A) \cap E_2(B) = 1$ et ainsi $E_1(A) \cap E_2(B) = \mathrm{Vect}(u_5)$.

I.3.b. D'après la question I.1, $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}(e_3)$ et e_3 n'est pas vecteur propre de B donc $E_{-2}(A) \cap E_2(B) = \{0\}$. On en déduit que les seuls vecteurs propres communs à A et B sont les λu_5 avec $\lambda \neq 0$.

I. 4.

I.4.a. On calcule $AB - BA = C$.

I.4.b. Le polynôme caractéristique de C vaut (après calcul) $X(X-6)(X+6)$; il est scindé à racines simples donc C est diagonalisable, et ainsi semblable à la matrice D. Le rang est un invariant de similitude donc $\mathrm{rg}\, C = \mathrm{rg}\, D = 2$.

Partie II : condition nécessaire et conditions suffisantes

II. 1.

II.1.a. Il existe λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que $Ae = \lambda e$ et $Be = \mu e$. Alors $ABe = BAe = \lambda\mu e$ donc $[A, B]e = 0$ et $e \in \mathrm{Ker}[A, B]$.

II.1.b. e est vecteur propre donc non nul ; ainsi, $\dim \mathrm{Ker}[A, B] \geqslant 1$ et d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}[A, B] < n$.

II. 2.
Si $[A, B] = 0$ alors $\mathrm{Ker}[A, B] = \mathcal{M}_{3,1}(()\mathbb{C})$ et tout sous-espace propre de A est inclus dans $\mathrm{Ker}[A, B]$.
Or en supposant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on s'assure l'existence d'au moins une valeur propre pour A, donc A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$.

II. 3.

II.3.a. La linéarité de ψ est évidente ; il s'agit donc de montrer que pour tout $x \in E_\lambda(A)$, $\psi(x) \in E_\lambda(A)$.
Soit donc $x \in E_\lambda(A)$. $Ax = \lambda x$ et $BAx = \lambda Bx$. Or par hypothèse, $[A, B]x = 0$ donc $ABx = BAx$ et ainsi $ABx = \lambda Bx$, ce qui montre que $Bx \in E_\lambda(A)$.

II.3.b. λ est valeur propre de A donc $E_\lambda(A)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension au moins égale à 1. Tout endomorphisme de $E_\lambda(A)$ et en particulier ψ possède au moins une valeur propre μ (le corps de base est $\mathbb{C}$) : il existe donc $e \in E_\lambda(A)$ tel que $e \neq 0$ et $\psi(e) = \mu e$, soit $Be = \mu e$. Le vecteur e est un vecteur propre commun à A et B.

II. 4. Les seuls endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 1 sont les homothéties vectorielles, et tout vecteur non nul est vecteur propre d'une homothétie. Tout vecteur non nul est donc vecteur propre commun à ϕ et ψ. La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

II. 5.

II.5.a. A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$ donc il existe $u \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ tel que $u \notin \mathrm{Ker}[\mathrm{A},\mathrm{B}]$, soit tel que $\mathrm{A}u = \lambda u$ et $\mathrm{C}u \neq 0$.

II.5.b. $v = \mathrm{C}u$ est un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,\mathrm{C}$ et $\dim(\mathrm{Im}\,\mathrm{C}) = 1$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{C} = \mathrm{Vect}(v)$.

II.5.c. $v = (\mathrm{A}b - \mathrm{BA})u = \mathrm{AB}u - \mathrm{BA}u = \mathrm{AB}u - \lambda \mathrm{B}u = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{B}u$ donc $v \in \mathrm{Im}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$. D'après la question précédente, on en déduit que $\mathrm{Im}\,\mathrm{C} \subset \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$.

II.5.d. $\mathrm{rg}\,\mathrm{C} = 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,\mathrm{C}) = 1$ et $1 \leqslant \dim(\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A}))$.
λ est valeur propre de A donc $\dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}) \geqslant 1$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})) \leqslant n - 1$.

II.5.e. A et $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ commutent donc $[\mathrm{A}, \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n] = 0$.
B et I_n commutent donc $[\mathrm{B}, \mathrm{I}_n] = 0$. Mais par linéarité $[\mathrm{B}, \mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n] = [\mathrm{B},\mathrm{A}] - \lambda[\mathrm{B}, \mathrm{I}_n] = [\mathrm{B},\mathrm{A}] = -[\mathrm{A},\mathrm{B}] = -\mathrm{C}$.
La linéarité de φ et ψ est évidente. De plus, pour tout $y \in \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$ il existe $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $y = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)x$ et :

$$\mathrm{A}y = \mathrm{A}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)x = (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{A}x \in \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}y = \mathrm{B}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)x = -\mathrm{C}x + (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)\mathrm{B}x \in \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A}) \text{ car } \mathrm{Im}(\mathrm{C}) \subset \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$$

Il en résulte que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$.

II.5.f. Posons $k = \dim(\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A}))$. D'après II.5.d on a $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Pour tout $x \in \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$, $[\varphi, \psi](x) = [\mathrm{A},\mathrm{B}]x = \mathrm{C}x$. Par hypothèse $\mathrm{rg}(\mathrm{C}) = 1$ et on sait d'après la question II.5.c que $\mathrm{Im}\,\mathrm{C} \subset \mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$ donc $\mathrm{rg}[\varphi, \psi] = 1$. On peut donc appliquer la propriété $\mathcal{P}_k$: φ et ψ possèdent un vecteur propre commun x dans $\mathrm{Im}_\lambda(\mathrm{A})$. Il existe donc α et β dans $\mathbb{C}$ tels que $\varphi(x) = \alpha x$ et $\psi(x) = \beta x$, soit encore $\mathrm{A}x = \alpha x$ et $\mathrm{B}x = \mu x$; A et B ont bien un vecteur propre en commun.

II. 6. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- La propriété $\mathcal{P}_1$ a été prouvée à la question II.4.
- Si $n \geqslant 2$, supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ acquise pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et considérons deux endomorphismes φ et ψ d'un espace vectoriel E de dimension n vérifiant $\mathrm{rg}[\varphi, \psi] \leqslant 1$.
  Soit (e) une base de E, $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e)}(\varphi)$ et $\mathrm{B} = \mathrm{Mat}_{(e)}(\psi)$. On a $\mathrm{rg}[\mathrm{A},\mathrm{B}] \leqslant 1$.
  - Si $\mathrm{rg}[\mathrm{A},\mathrm{B}] = 0$ alors $[\mathrm{A},\mathrm{B}] = 0$ et la question II.2 montre que A et B vérifient $\mathcal{H}$. La question II.3 montre alors que A et B possèdent un vecteur propre en commun.
  - Si $\mathrm{rg}[\mathrm{A},\mathrm{B}] = 1$, la question II.5 associée à l'hypothèse de récurrence montre que A et B possèdent là encore un vecteur propre en commun.

  Dans tous les cas les matrices A et B, et donc les endomorphismes φ et ψ, possèdent un vecteur propre en commun. La propriété $\mathcal{P}_n$ est démontrée, la récurrence se propage.

Partie III : ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

III. 1. $g(\mathrm{P}) = \mathrm{X}^{2n}\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} a_k \mathrm{X}^{-k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k \mathrm{X}^{2n-k} = \sum_{j=0}^{2n} a_{2n-j}\mathrm{X}^j$ en posant $j = 2n - k$.

III. 2. La dérivation est un opérateur linéaire et pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{P}' \in \mathrm{E}$ donc f est un endomorphisme de E.
La question précédente montre que g est à valeurs dans E.
g est linéaire car $g(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = \mathrm{X}^{2n}(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q})\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) = \lambda \mathrm{X}^{2n}\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) + \mathrm{X}^{2n}\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) = \lambda g(\mathrm{P}) + g(\mathrm{Q})$ donc g est un endomorphisme de E.

III. 3.

III.3.a. Soit P un vecteur propre de g pour une valeur propre λ. Avec les notations de la question III.1 on a pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $a_{2n-k} = \lambda a_k$.
P est non nul donc il existe $k \in [\![0, 2n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$.

- Si $k \geqslant n$ alors $\deg \mathrm{P} \geqslant n$.
- Si $k < n$, on a $a_k = a_{2n-(2n-k)} = \lambda a_{2n-k}$ donc $a_{2n-k} \neq 0$. Mais $2n - k > n$ donc $\deg \mathrm{P} > n$.

Dans tous les cas on a bien $\deg \mathrm{P} \geqslant n$.

III.3.b. $g(\mathrm{X}^n) = \mathrm{X}^n$ donc X^n est vecteur propre pour la valeur propre 1.

III. 4.

III.4.a. On a $P^{(i)} = 0 \iff \deg P \leqslant i-1$ donc $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$.

III.4.b. Soit $P \in E \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f^i(P) = \lambda P$. Si $\lambda \neq 0$ on a $\deg f^i(P) = \deg P$ soit $\deg P - i = \deg P$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $\lambda = 0$.
Réciproquement $\lambda = 0$ est bien valeur propre de f^i avec pour sous-espace propre $\mathbb{C}_{i-1}[X]$ donc $\mathrm{Sp}(f^i) = \{0\}$.

III. 5. Supposons que f^i et g aient un vecteur propre en commun P. D'après III.3a on a $\deg P \geqslant n$ et d'après III.4b, $\deg P \leqslant i-1$. On en déduit que $i-1 \leqslant n$, soit $i \geqslant n+1$.
Réciproquement, supposons $i \geqslant n+1$. Alors d'après les questions III.3b et III.4b le polynôme X^n est un vecteur propre commun à f^i et à g.

III. 6. On a $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

III. 7.

III.7.a. Pour $n = 1$ on obtient $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on calcule $A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_1^3 = O_3$.

III.7.b. On calcule $[A_1, B_1] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}[A_1, B_1] = 2$. On calcule $[A_1^2, B_1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{rg}[A_1^2, B_1] = 2$.

III.7.c. D'après III.5 les matrices A_1 et B_1 n'ont pas de vecteurs propres en commun alors que $\mathrm{rg}[A_1, B_1] < 3$. La condition de la question II.1b (à savoir $\mathrm{rg}[A, B] < \dim E$) n'est pas suffisante pour s'assurer de l'existence d'un vecteur propre commun à A et B.
Toujours d'après III.5 les matrices A_1^2 et B_1 ont un vecteur propre en commun, alors que la propriété de la question II.6 (à savoir $\mathrm{rg}[A, B] = 1$) n'est pas vérifiée. Cette condition n'est donc pas nécessaire pour s'assurer que A et B ont un vecteur propre en commun.

Partie IV : FORME NORMALE POUR UN VECTEUR PROPRE

IV. 1. Considérons deux vecteurs propres (X, Y) formant une famille libre de $E_\lambda(A)$. Si l'un des deux possède une composante nulle alors ce vecteur est élément de $\mathcal{N}$ donc est sous forme normale.
Si les composantes de chacun de ces deux vecteurs sont non nuls, on pose $Z = x_1 Y - y_1 X$. Il s'agit d'un vecteur propre de A, non nul cars (X, Y) est libre et $(x_1, y_1) \neq (0, 0)$, et sa première composante est nulle donc il appartient à $\mathcal{N}$. Il est donc sous forme normale.

IV. 2.

IV.2.a. La matrice M définie par $M_{i,j} = i - j$ est antisymétrique donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{C}) \neq \{O_n\}$.

IV.2.b. Si M est antisymétrique alors $M_{i,i} = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc chacune des colonne de M possède un coefficient nul donc appartient à $\mathcal{N}$.

IV.2.c. La linéarité de φ et ψ est évidente. De plus, si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ alors $\varphi(M)^T = AM^T + M^T A^T = -AM - MA^T = -\varphi(M)^T$ donc $\varphi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$, et $\psi(M)^T = AM^T A^T = -AMA^T = -\psi(M)$ donc $\psi(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$. Nous avons montré que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

IV.2.d. Pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi \circ \psi(M) = A\psi(M) + \psi(M)A^T = A^2 M A^T + AM(A^T)^2 \qquad \text{et} \qquad \psi \circ \varphi(M) = A\varphi(M)A^T = A^2 M A^T + AM(A^T)^2$$

donc $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

IV. 3.

IV.3.a. **(i)** $B^T = X_2 X_1^T - X_1 X_2^T = -B$ donc $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$.

(ii) Supposons $B = O_n$, soit $X_1X_2^T = X_2X_1^T$. Si on note $X_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \vdots \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$ la j^e colonne de $X_1X_2^T$ vaut $x_{2,j}X_1$ et celle de $X_2X_1^T$ vaut $x_{i,j}X_2$. On a donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $x_{2,j}X_1 = x_{1,j}X_2$. Mais la famille (X_1, X_2) est libre donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $(x_{1,j}, x_{2,j}) = (0,0)$, ce qui est absurde. On en déduit que $B \neq O_n$.

(iii) $AB = AX_1X_2^T - AX_2X_1^T = \lambda_1X_1X_2^T - \lambda_2X_2X_1^T$. En transposant, sachant que B est antisymétrique, on obtient : $-BA^T = \lambda_1X_2X_1^T - \lambda_2X_1X_2^T$. On en déduit $AB + BA^T = \lambda_1(X_1X_2^T - X_2X_1^T) - \lambda_2(X_2X_1^T - X_1X_2^T) = (\lambda_1 + \lambda_2)B$.

(iv) $ABA^T = AX_1(AX_2)^T - (AX_2)(AX_1)^T = \lambda_1\lambda_2X_1X_2^T - \lambda_2\lambda_1X_2X_1^T = \lambda_1\lambda_2B$.

IV.3.b. En développant et en utilisant **(iii)** et **(iv)** on obtient :

$$(A - \lambda_1I_n)(A - \lambda_2I_n)B = A^2B - (\lambda_1 + \lambda_2)AB + \lambda_1\lambda_2B = A^2B - A(AB + BA^T) + ABA^T = O_n$$

IV.3.c. On a ici $AB = \lambda_2B$, ce qui signifie que chacune des colonnes $B_1, \dots, B_n$ de B vérifie $AB_j = \lambda_2B_j$. Puisque $B \neq O_n$ (question IV.3a) l'une de ses colonnes au moins est vecteur propre de A, et puisque B est antisymétrique, cette colonne est élément de $\mathcal{N}$ (question IV.2b).

IV.3.d. Ici, chacune des colonnes non nulles (il en existe au moins une) de la matrice $(A - \lambda_2I_n)B$ est vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1. Or ces vecteurs colonnes sont dans $\mathrm{Im}(A - \lambda_2I_n) = \mathrm{Im}_{\lambda_2}(A)$; ils sont donc sous forme normale (au sens de la deuxième caractérisation de cette forme normale).

IV. 4.

IV.4.a. On a $[\varphi, \psi] = 0$ donc d'après la question II.6 les endomorphismes φ et ψ ont un vecteur propre commun, autrement dit une matrice non nulle et antisymétrique $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ et deux scalaires α et β tels que $\varphi(B) = \alpha B$ et $\psi(B) = \beta B$, ce qui s'écrit : $AB + BA^T = \alpha B$ et $ABA^T = \beta B$.

IV.4.b. On calcule $(A^2 - \alpha A + \beta I_n)B = A^2B - \alpha AB + \beta B = A^2B - A(AB + BA^T) + ABA^T = O_n$.

IV.4.c. Le polynôme $X^2 - \alpha X + \beta$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ donc il existe $(\gamma, \delta)^2$ tels que $X^2 - \alpha X + \beta = (X - \gamma)(X - \delta)$, et l'égalité précédent s'écrit alors $(A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = O_n$.

IV.4.d. On raisonne comme en IV.3c : chacune des colonnes non nulles de B est vecteur propre de A pour la valeur propre δ (et il en existe au moins une car $B \neq O_n$), et chacun de ses vecteurs propres appartient à $\mathcal{N}$ puisque B est antisymétrique donc est sous forme normale.

IV.4.e. On raisonne comme en IV.3d : chacune des colonnes non nulles X (il en existe au moins une) de la matrice $(A - \delta I_n)B$ vérifie $AX = \gamma X$ donc est vecteur propre de A pour la valeur propre γ, ce qui implique au passage qu'on a aussi $\gamma = \lambda$ puisque A possède une unique valeur propre. Or ces vecteurs colonnes sont dans $\mathrm{Im}(A - delta I_n) = \mathrm{Im}_\lambda(A)$; ils sont donc sous forme normale.

IV.4.f. Par hypothèse A possède une unique valeur propre λ donc δ n'est pas valeur propre de A, ce qui signifie que $A - \delta I_n$ est inversible. Sachant que $O_n = (A - \gamma I_n)(A - \delta I_n)B = (A - \delta I_n)(A - \gamma I_n)B$ on obtient en multipliant à gauche par $(A - \delta I_n)^{-1}$ que $(A - \gamma I_n)B = O_n$. On peut alors appliquer IV.4d et en déduire que A possède un vecteur propre sous forme normale.

IV.4.g. Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque. Cette matrice possède au moins une valeur propre car χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

- Si A possède au moins deux valeurs propres, la question IV.3 montre que A possède un vecteur propre sous forme normale.
- Si A possède une unique valeur propre, la question IV.4 montre que A possède un vecteur propre sous forme normale.

Nous avons donc montré que dans tous les cas la matrice A possède un vecteur propre sous forme normale.