Corrigé : Trois exercices (CC INP PC 2023)

EXERCICE 1
Endomorphismes cycliques

Partie I – Étude d'un premier exemple

Q1. On calcule $f(v) = (4,1)$. $\det(v, f(v)) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. L'endomorphisme f est donc cyclique.

Q2. $\chi_f(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ est scindé à racines simples donc f est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(f) = \{2,3\}$.
On résout $f(x,y) = 2(x,y) \iff x = y$ donc $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(1,1)$ et $f(x,y) = 3(x,y) \iff x = 2y$ donc $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(2,1)$.

Q3. Pour tout vecteur propre w de $\mathbb{R}^2$, la famille $(w, f(w))$ n'est pas une base puisque liée.

Partie II – Étude d'un deuxième exemple

Q4. On calcule $\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{M} + 2\mathrm{I}_3$ donc $g^2 = g + 2\mathrm{Id}$.

Q5. Le polynôme annulateur $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2 = (\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-2)$ est scindé à racines simples donc g et donc M sont diagonalisables.

Q6. Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, la famille $(x, g(x), g^2(x))$ est liée car $g^2(x) = g(x) + 2x \in \mathrm{Vect}(x, g(x))$ donc g ne peut être cyclique.

Partie III – Étude d'un troisième exemple

Q7. Pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\Delta(\lambda\mathrm{P} + \mathrm{Q}) = (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}+1) - (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = \lambda(\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})) + (\mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X})) = \lambda\Delta(\mathrm{P}) + \Delta(\mathrm{Q})$ donc Δ est linéaire. De plus, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\deg \Delta(\mathrm{P}) \leqslant n$ donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Q8. On a $\Delta(1) = 0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $(\mathrm{X}+1)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{X}^i$ donc $\Delta(\mathrm{X}^k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{X}^i$.

Q9. Soit $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$. Par linéarité on a

$$\Delta(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(\mathrm{X}^k) = \sum_{k=1}^{d} a_k \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathrm{X}^i = \sum_{i=0}^{d-1} \left(\sum_{k=i+1}^{d} a_k \binom{k}{i} \right) \mathrm{X}^i$$

On constate déjà que $\deg \Delta(\mathrm{P}) \leqslant d - 1$, et le coefficient devant le terme de degré $d-1$ vaut $d a_d \neq 0$ donc $\deg \Delta(\mathrm{P}) = d - 1 = \deg \mathrm{P} - 1$.

Q10. De ceci il résulte que la famille $(\mathrm{X}^n, \Delta(\mathrm{X}^n), \Delta^2(\mathrm{X}^n), \cdots, \Delta^{n-1}(\mathrm{X}^n), \Delta^n(\mathrm{X}^n))$ est échelonnée en degré donc est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. L'endomorphisme Δ est donc cyclique.

Partie IV – Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Q11. On établit par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $h^p(v_k) = \lambda_k^p v_k$, puis par linéarité : $h^p(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k^p v_k$.

Q12. On factorise la k^e colonne de $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ par α_k et on reconnait alors un déterminant de Vandermonde, donc

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Q13. S'il existe $i \neq j$ tel que $\lambda_i = \lambda_j$ alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est nul quel que soit $v \in \mathrm{E}$, ce qui prouve que la famille $(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v))$ est toujours liée. L'endomorphisme h n'est donc pas cyclique.
En revanche, si $i \neq j \implies \lambda_i \neq \lambda_j$ alors il suffit qu'aucun des α_k ne soit nul pour que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ soit non nul, autrement dit que la famille $\mathcal{F}$ soit une base.
Ainsi, h est cyclique si et seulement s'il admet n valeurs propres distinctes.

EXERCICE 2
La fonction dilogarithme

Partie I – Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Q14. Pour tout $t > 0$ on a $\mathrm{e}^t > 1$ donc pour tout $x \leqslant 1$, $\mathrm{e}^t - x > 0$. f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Q15. On a $\lim_{t \to 0^+} f(t, 1) = 1$ donc $t \mapsto f(t, 1)$ est prolongeable par continuité en 0.
On a $f(t, 1) \underset{+\infty}{\sim} t\,\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc il en est de même de $t \mapsto f(t, 1)$.

Q16. Pour tout $x \geqslant 1$, pour tout $t > 0$, $0 \leqslant f(x, t) \leqslant f(1, t)$ donc d'après la question précédente la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q17. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]-\infty, 1]$, et $|f(x, t)| \leqslant f(1, t)$. La fonction $t \mapsto f(1, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t, x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $]-\infty, 1]$. Il en est donc de même de L.

Partie II – Développement en série entière

Q18. Lorsque $t \to +\infty$ on a $s_n(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t/2})$ donc s_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus,

$$\int_0^y s_n(t)\,\mathrm{d}t = x^n \left[\left(\frac{-t}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \mathrm{e}^{-(n+1)t} \right]_0^y = x^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \left(\frac{-y}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \mathrm{e}^{-(n+1)y} \right)$$

donc en faisant tendre y vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Q19. En factorisant par $t\,\mathrm{e}^{-t}$ on reconnait une série géométrique de raison $x\,\mathrm{e}^{-t} \in]-1, 1[$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = t\,\mathrm{e}^{-t} \frac{1}{1 - x\,\mathrm{e}^{-t}} = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} = f(t, x)$$

Q20. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction s_n est de signe constant donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^n}{(n+1)^2} = u_n$.
Si $x = 0$ la série $\sum u_n$ converge. Si $x \neq 0$, $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = |x| < 1$ donc d'après le critère de d'Alembert la série $\sum u_n$ converge.
Toutes les hypothèses sont donc réunies pour appliquer le théorème d'interversion somme/intégrale, qui affirme que $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable (ce qu'on savait déjà) et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$.
On en déduit que $\displaystyle \mathrm{L}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Q21. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\displaystyle \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(1 + (-1)^n\big)\frac{x^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} 2\frac{x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{p^2} = \frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2)$.

Q22. Pour $x = 1$, cette relation donne $\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(-1) = \dfrac{1}{2}\mathrm{L}(1)$, soit $2\mathrm{L}(-1) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{L}(1)$.
Mais par ailleurs $\displaystyle \mathrm{L}(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ donc $\mathrm{L}(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Partie III – Une autre propriété

Q23. D'après la partie II la fonction L est développable en série entière sur $[-1,1]$ donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur $]-1,1[$.
En outre, on obtient sa dérivée en dérivant terme à terme : $\displaystyle \mathrm{L}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Q24. On en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1[$ et pour tout $x \in]0,1[$, $h'(x) = \mathrm{L}'(x) + \dfrac{\ln(1-x)}{x} - \mathrm{L}'(1-x) - \dfrac{\ln x}{1-x} = 0$ donc la fonction h est constante.

Q25. Nous avons montré à la question 17 que la fonction L est continue en 0 et en 1. On a donc $\lim\limits_{x\to 0}\big(\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x)\big) = \mathrm{L}(0) + \mathrm{L}(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Par ailleurs, $\ln(x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x\ln x$ donc par croissances comparées, $\lim\limits_{0} \ln(x)\ln(1-x) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Mais h est constante sur $]0,1[$, donc pour tout $x \in]0,1[$, $h(x) = \dfrac{\pi^2}{6}$.
En particulier, pour $x = \dfrac{1}{2}$, $2\mathrm{L}(1/2) + \ln(2)^2 = \dfrac{\pi^2}{6}$ donc $\mathrm{L}(1/2) = \dfrac{\pi^2}{12} - \dfrac{\ln(2)^2}{2}$.
Par ailleurs, en revenant à la définition intégrale de la fonction L on a $\displaystyle \mathrm{L}(1/2) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1/2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\,\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln(2)^2}{2}$.

EXERCICE 3
Un jeu de société

Partie I – Préliminaires

I.1 - Modélisation

Q26. X_n représente le n^{e} entier généré par l'ordinateur, S_n la case atteinte par la case au bout de n déplacements.

Q27. T représente le nombre de déplacements nécessaire au pion pour atteindre ou dépasser la case A, avec la convention $T = 0$ si cette case n'est jamais atteinte.

I.2 - Calcul de la somme d'une série entière

Q28. f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ donc a fortiori sur $]-1, 1[$. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $f^{(p)}(x) = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$:

- c'est vrai pour $p = 0$;
- si $p > 0$, supposons $f^{(p-1)}(x) = \dfrac{(p-1)!}{(1-x)^p}$. En dérivant on obtient $f^{(p)}(x) = \dfrac{p\times(p-1)!}{(1-x)^{p+1}} = \dfrac{p!}{(1-x)^{p+1}}$ donc la récurrence se propage.

Q29. On a $\dfrac{\binom{n+1}{p}}{\binom{n}{p}} = \dfrac{n+1}{n-p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc d'après le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant p}\binom{n}{p}x^n$ est égal à 1.

Q30. On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Une série entière se dérive terme à terme donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)x^{n-p} = p!\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^{n-p}$.

On a donc $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty}\binom{n}{p}x^n = \frac{1}{p!}x^p f^{(p)}(x) = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$.

Partie II – Étude d'un premier cas

II.1 - Loi des variables aléatoires S_n et T

Q31. Si $M = 2$ alors X_n suit une loi binomiale de paramètre 1/2 donc S_n suit une loi binomiale de paramètre $(n, 1/2)$.

Q32. Les déplacements sont de 0 ou de 1 case à chaque étape donc $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

Q33. On a $(T = k) = (S_{k-1} = A-1) \cap (X_k = 1)$. D'après le lemme des coalitions les événements $(S_{k-1} = A-1)$ et $(X_k = 1)$ sont indépendants donc $\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = A-1)\mathbb{P}(X_k = 1) = \dbinom{k-1}{A-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}\times\dfrac{1}{2} = \dbinom{k-1}{A-1}\dfrac{1}{2^k}$.

Q34. On a $P(T \geqslant A) = \displaystyle\sum_{k=A}^{+\infty}\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\times\frac{(1/2)^{A-1}}{(1/2)^A} = 1$ d'après la question 30 donc $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.

II.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q35. D'après la question 33, $\dfrac{\mathbb{P}(T = k+1)}{\mathbb{P}(T = k)} = \dfrac{k}{2(k-A)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ donc le rayon de convergence de G_T est égal à 2 (critère de d'Alembert). De plus, pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$G_T(x) = \sum_{k=A}^{+\infty}\binom{k-1}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{x}{2}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{x}{2}\times\frac{(x/2)^{A-1}}{(1-x/2)^A} = \frac{x^A}{(2-x)^A}$$

d'après la question 30.

Q36. La fonction G_T est dérivable en 1 puisque le rayon de convergence est égal à 2 donc T possède une espérance finie $\mathbb{E}(T) = G_T'(1) = 2A$.

Partie III – Étude d'un second cas

III.1 - Calcul de la probabilité $\mathbb{P}(S_n \leqslant k)$

Q37. Pour tout $\ell \in [\![0, M-1]\!]$, $\mathbb{P}\big(S_{n+1} \leqslant k \mid X_{n+1} = \ell\big) = \begin{cases} \mathbb{P}(S_n \leqslant k-\ell) & \text{si } \ell \leqslant k \\ 0 & \text{si } \ell > k \end{cases}$ donc d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{M-1} \mathbb{P}\big(S_{n+1} \leqslant k \mid X_{n+1} = \ell\big)\mathbb{P}(X_{n+1} = \ell) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(S_n \leqslant k-\ell)$.

Q38. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $k \in [\![0, A-1]\!]$, $\mathbb{P}(S_n \leqslant k) = \dfrac{1}{M^n}\dbinom{n+k}{n}$:

- si $n = 1$, $\mathbb{P}(S_1 \leqslant k) = \mathbb{P}(X_1 \leqslant k) = \dfrac{k+1}{M} = \dfrac{1}{M}\dbinom{k+1}{k}$;
- si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang n. Alors :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant k) = \frac{1}{M}\sum_{\ell=0}^{k} \frac{1}{M^n}\binom{n+k-\ell}{n} = \frac{1}{M^{n+1}}\binom{n+1+k}{n+1}$$

  d'après la formule admise. La récurrence se propage.

III.2 - Espérance de la variable aléatoire T

Q39. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Les événements $(T > n)$ et $(S_n < A)$ sont équivalents donc $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(S_n < A)$, et

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n < A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{M^n}\binom{n+A-1}{A-1} = M^{A-1}\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\frac{1}{M^k}$$

D'après la question 30, $\displaystyle\sum_{k=A-1}^{+\infty}\binom{k}{A-1}\left(\frac{1}{M}\right)^k = \frac{(1/M)^{A-1}}{(1-1/M)^A}$ donc $\mathbb{E}(T) = \left(\dfrac{M}{M-1}\right)^A$.