Trois exercices (CC INP PC 2021)

Durée : libre

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1
Les urnes de Pólya

On fixe un couple d'entiers $(b,r) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Partie I – Préliminaires

Q1. Déterminer la loi de X_1.

Q2. Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

Q3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par S_n ?

Partie II – La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q4. Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)$.

Q5. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b + r + n}$$

Q6. Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie III – La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Q7. Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

Q8. Montrer que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $P(S_n = n+1) = \dfrac{1}{n+1}$.

Q9. Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k$$

Q10. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k).$$

Q11. Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

EXERCICE 2
Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \tag{P}$$

Partie I – Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q12. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$.

Q13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Q14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q16. Montrer que si $f :]0, +\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

Q17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II – Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Q19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

Q20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Q21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III – Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

Q23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q24. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

EXERCICE 3
Approximation d'une racine carrées par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et tr(M) la trace de la matrice M.

Partie I – Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q27. Déduire des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}.$$

Partie II – Généralités sur les racines carrées d'une matrice

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$. Dans ce cas, on sait que B est une racine carrée de A.

Q30. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A admet une racine carrée, alors $\det(\mathrm{A}) \geqslant 0$.

Q31. Étudier la réciproque de la propriété établie dans la question précédente dans le cas où $n = 2$. On pourra considérer la matrice :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

et écrire $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

Dans tout le reste de l'exercice, on considère une matrice symétrique $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont positives.

Q32. Justifier que la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de S comptées avec leur multiplicité. On fixe une matrice orthogonale $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1}$ où :

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On considère également la matrice $\mathrm{R} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1}$ avec :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Q33. Vérifier que R est une matrice symétrique et une racine carrée de S.

Partie III – Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

On note $\mathcal{D}_n^+$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. On considère également la partie $\mathcal{C}_\mathrm{P}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\mathcal{C}_\mathrm{P} = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} \in \mathcal{D}_n^+\right\}.$$

Q34. Vérifier que $I_n \in C_P$. Montrer que si $M \in \mathcal{C}_P$, alors M est une matrice inversible et on a :

$$\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in \mathcal{C}_P.$$

La question précédente implique que l'on peut définir la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_P$ par :

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_k = \frac{1}{2}(U_{k-1} + SU_{k-1}^{-1}).$$

On considère également la suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $V_k = P^{-1}U_kP$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Q35. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer V_k en fonction de D et V_{k-1}. En déduire par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$V_k = \begin{pmatrix} f_k(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

où f_k est la fonction définie dans la partie I de cet exercice.

On considère l'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N(B) = \sqrt{\operatorname{tr}(BB^T)}.$$

On admet que l'application N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q36. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$.

Q37. En déduire à l'aide de la question 29 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité :

$$N(R - U_k) \leqslant \frac{\operatorname{tr}(S) + n}{2^k}.$$

Q38. Conclure que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers R.