Corrigé : trois exercices (CC INP PC 2021)

EXERCICE 1
Les urnes de Pólya

Partie I – Préliminaires

Q1. X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$.

Q2. $(X_2 \mid X_1 = 1)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b+1}{b+r+1}$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{b+1}{b+r+1}\frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1}\frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

On constate que X_2 suit la même loi que X_1.

Q3. La variable aléatoire S_n est égale au nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. S_n est donc à valeurs dans $[\![b, b+n]\!]$.

Partie II – La loi de X_n

Q4. Après n tirages il y a $b+r+n$ boules dans l'urne donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k) = \dfrac{k}{b+r+n}$.

Q5. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{b+r+n}\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

Q6. Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{b}{b+r}$:

- le résultat est acquis pour $n = 1$ d'après la question 1 ;
- si $n \geqslant 1$, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang n. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = b + \frac{nb}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$$

  donc $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{b}{b+r}$; la récurrence se propage.

Partie III – La loi de S_n dans un cas particulier

Q7. $S_n = 1$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $X_k = 0$ donc $[S_n = 1] = \displaystyle\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 0]$.

Q8. On a $[S_{n+1} = 1] = [S_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0]$ donc $\mathbb{P}(S_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = 1)\mathbb{P}(S_n = 1) = \dfrac{n+1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = 1)$. Sachant que $\mathbb{P}(S_0 = 1) = 1$ on en déduit par récurrence que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \dfrac{1}{n+1}$.

Q9. On a $S_{n+1} = S_n$ ou $S_{n+1} = S_n + 1$ donc

- si $\ell \notin \{k-1, k\}$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = \ell) = 0$;
- si $\ell = k-1$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid S_n = k-1) = \dfrac{k-1}{n+2}$;
- si $\ell = k$, $\mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid S_n = k) = \dfrac{k-1}{n+2} = 1 - \dfrac{k}{n+2}$.

Q10. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k-1)\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$$

Q11. Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$:

- c'est évident pour $n = 0$;
- si $n \geqslant 0$, on suppose le résultat acquis au rang n. Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k-1) = \dfrac{1}{n+1}$ donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

Ce résultat reste vrai pour $k = 1$ (question 8) et puisque S_{n+1} est à valeurs dans $[\![1, n+2]\!]$,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

On a prouvé que S_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$, la récurrence se propage.

EXERCICE 2
Résolution d'une équation fonctionnelle

Partie I – Existence et unicité de la solution du problème (P)

I.1 - Existence de la solution

Q12. Fixons $x > 0$. On a $|\varphi_k(x)| = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. La série $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge donc la série $\sum \varphi_k$ converge absolument et donc simplement sur $]0, \infty[$.

Q13. Pour tout $x > 0$, $\varphi(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2} - \varphi(x)$.

Q14. Pour tout $x > 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère spécial relatif aux séries alternées, $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right| \leqslant |\varphi_{n+1}(x)| = \dfrac{1}{(x+n+1)^2}$.

Q15. Pour $n = 0$ on obtient : $\left|\varphi(x) - \varphi_0(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc $\left|\varphi(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Ainsi, $\lim\limits_{+\infty}\varphi(x) = 0$ et d'après la question 13, φ est solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q16. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n :

- si $n = 0$ le résultat est vrai car f est solution de (P) donc $f(x) = -f(x+1) + \dfrac{1}{x}$;
- si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$: $f(x) = (-1)^n f(x+n) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

  D'après (P), $f(x+n) = -f(x+n+1) + \dfrac{1}{(x+n)^2}$ donc $f(x) = (-1)^{n+1}f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$: la récurrence se propage.

Q17. Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n+1) = 0$ car f est solution de (P), on en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$: $\forall x > 0$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$. Nous avons prouvé que φ est l'unique solution de (P).

Partie II – Étude de la solution du problème (P)

Q18. Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|\varphi_k\|_{\infty,[\epsilon,+\infty[} = \dfrac{1}{(k+\epsilon)^2} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. La convergence de la série $\sum \varphi_k$ est normale, et donc uniforme, sur $[\epsilon,+\infty[$.

Q19. Sachant que φ_k est continue pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que φ est continue sur tout intervalle $[\epsilon,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ par recouvrement.
On a $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \varphi(x+1)$ avec $\lim\limits_{0} \varphi(x+1) = \varphi(1)$ car φ est continue en 1, donc $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Q20. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et $\varphi_k'(x) = \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.
Pour tout $\epsilon > 0$, $\|\varphi_k\|_{\infty,[\epsilon,+\infty[} = \dfrac{2}{(\epsilon+k)^3} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^3}\right)$ donc la convergence de $\sum \varphi_k'$ est normale, et donc uniforme, sur $[\epsilon,+\infty[$.
On en déduit que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout intervalle $[\epsilon,+\infty[$, puis sur $]0,+\infty[$ par recouvrement, et que pour tout $x > 0$, $\varphi'(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

Q21. La série définissant φ' vérifie les hypothèses du critère spécial relatif aux séries alternées donc $\varphi'(x)$ est du signe de son premier terme, à savoir $\varphi'(x) \leqslant 0$. La fonction φ est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q22. On a donc pour tout $x > 0$, $2\varphi(x+1) \leqslant \varphi(x) + \varphi(x+1) \leqslant 2\varphi(x)$ donc $2\varphi(x+1) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x)$. En ré-indexant la première de ces deux inégalités on obtient pour tout $x > 1$, $2\varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$, donc pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$. On en déduit que $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Partie III – Expression intégrale de la solution du problème (P)

Q23. Soit $x > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x+k-1 > -1$ donc on peut choisir un réel α vérifiant $x+k-1 > \alpha > -1$. On a alors $\left|t^{x+k-1}\ln(t)\right| \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(t^{-\alpha})$. La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ aussi.

Considérons le schéma d'intégration par parties suivant : $\begin{array}{c|cc|} + & \ln(t) & t^{x+k-1} \\ - & \dfrac{1}{t} & \dfrac{t^{x+k}}{x+k} \end{array}$. Par croissances comparées $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)\dfrac{t^{x+k}}{x+k} = 0$ donc l'intégration par parties est licite : $\displaystyle\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \left[\ln(t)\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+k-1}}{x+k}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(x+k)^2}$.

Q24. Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$;
- la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} t^{x+k-1}\ln(t)$ converge simplement sur $]0,1]$;
- $\displaystyle\int_0^1 \left|t^{x+k-1}\ln(t)\right|\mathrm{d}t = -\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+k)^2}$.

La série $\sum \dfrac{1}{(x+k)^2}$ converge donc le théorème s'applique : la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\varphi(x)$.

EXERCICE 3
Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Partie I – Approximation de la racine carrée d'un réel positif

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$

Q25. Pour tout $k \geqslant 1$, $f_k(x)^2 - x = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geqslant 0$. Puisque $f_k(x) \geqslant 0$, on en déduit que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$.

Q26. Pour tout $k \geqslant 2$, $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{x - f_{k-1}(x)^2}{2f_{k-1}(x)} \geqslant 0$ donc la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

Q27. La suite $(f_k(x))_{k\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{x}$ donc converge vers une limite $\ell(x) \geqslant \sqrt{x}$, limite qui vérifie : $\ell(x) = \frac{1}{2}\left(\ell(x) + \frac{x}{\ell(x)}\right)$ soit $\ell(x)^2 = x$. Puisque $\ell(x) \geqslant \sqrt{x}$ on en déduit que $\ell(x) = \sqrt{x}$.

I.2 - Majoration de l'erreur

Q28. On calcule $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{\left(f_k(x) - \sqrt{x}\right)^2}{2f_k(x)} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{f_k(x)} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$.

Q29. Sachant que pour tout $k \geqslant 1$, $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ on en déduit que $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}$ puis par récurrence que pour tout $k \geqslant 1$, $0 \leqslant f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{f_1(x) - \sqrt{x}}{2^{k-1}}$. Mais $f_1(x) = \frac{1+x}{2}$ donc en définitive, $\left|f_k(x) - \sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$.

Partie II – Généralités sur les racines carrées d'une matrice

Q30. Si $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$ alors $\det \mathrm{A} = (\det \mathrm{B})^2 \geqslant 0$.

Q31. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et supposons $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. En développant on obtient les conditions

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

Les égalités 2 et 3 imposent $c = 0$. Mais alors les deux autres donnent $a = d = 0$, incompatibles avec la seconde. Il n'existe donc pas de matrice $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$, alors que $\det \mathrm{A} = 0 \geqslant 0$. La réciproque du résultat établi à la question 30 est donc fausse.

Q32. S est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec une matrice de passage orthogonale).

Q33. P est orthogonale donc $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\mathrm{T}$, et ainsi $\mathrm{R}^\mathrm{T} = (\mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\mathrm{T})^\mathrm{T} = \mathrm{P}\Delta^\mathrm{T}\mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{R}$ donc R est symétrique. De plus, $\mathrm{R}^2 = \mathrm{P}\Delta^2\mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^\mathrm{T} = \mathrm{S}$ donc R est une racine carrée de S.

Partie III – Approximation d'une racine carrée d'une matrice symétrique

Q34. $\mathrm{P}\mathrm{I}_n\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{I}_n \in \mathcal{D}_n^+$ donc $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}_p$.

Si $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_p$ alors M est semblable à une matrice de $\mathcal{D}_n^+$. Or les matrices de cet ensemble ont toutes un déterminant strictement positif donc $\det \mathrm{M} > 0$: M est inversible. En outre, les inverses des matrices de $\mathcal{D}_n^+$ sont dans $\mathcal{D}_n^+$ donc $\mathrm{M}^{-1} \in \mathcal{C}_\mathrm{P}$.
Enfin, $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{M}+\mathrm{SM}^{-1})\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} + \mathrm{P}^{-1}\mathrm{SPP}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} + \mathrm{DP}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{P}$. Les matrices $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$, D et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}^{-1}\mathrm{P}$ sont dans $\mathcal{D}_n^+$ donc $\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{M}+\mathrm{SM}^{-1})\mathrm{P}$ aussi, et ainsi, $\frac{1}{2}\big(\mathrm{M}+\mathrm{SM}^{-1}\big) \in \mathcal{C}_p$.

Q35. Les calculs précédentes montrent que $\mathrm{V}_k = \frac{1}{2}(\mathrm{V}_{k-1} + \mathrm{DV}_{k-1}^{-1})$.
Ainsi, si $\mathrm{V}_{k-1} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors $\mathrm{V}_k = \mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2}\big(\alpha_1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\big), \dots, \frac{1}{2}\big(\alpha_n + \frac{\lambda_n}{\alpha_n}\big)\Big)$ et sachant que $\mathrm{V}_0 = \mathrm{I}_n$ on en déduit par récurrence sur k que $\mathrm{V}_k = \mathrm{diag}\big(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n)\big)$.

Q36. Si $\mathrm{A} = \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{BP}$ alors $\mathrm{tr}(\mathrm{AA}^\mathrm{T}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{BPP}^\mathrm{T}\mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{BB}^\mathrm{T}\mathrm{P}) = \mathrm{tr}(\mathrm{BB}^\mathrm{T})$ donc $\mathrm{N(A)} = \mathrm{N(B)}$: deux matrices orthogonalement semblables ont même norme.
Puisque $\mathrm{R} - \mathrm{U}_k = \mathrm{P}(\Delta - \mathrm{V}_k)\mathrm{P}^\mathrm{T}$ on en déduit que $\mathrm{N}(\mathrm{R} - \mathrm{U}_k) = \mathrm{N}(\Delta - \mathrm{V}_k)$.

Q37. Pour une matrice M de $\mathcal{D}_n^+$ on a $\mathrm{N(M)}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^2) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n m_{i,i}\Big)^2$ donc $\mathrm{N(M)} \leqslant \mathrm{tr}\,\mathrm{M}$.
En particulier, $\mathrm{V}_k - \Delta \in \mathcal{D}_n^+$ (questions 35 et 25) donc $\mathrm{N}(\mathrm{V}_k - \Delta) \leqslant \mathrm{tr}(\mathrm{V}_k - \Delta)$.
Or d'après la question 29, $f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i} \leqslant \frac{1+\lambda_i}{2^k}$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{V}_k - \Delta) \leqslant \frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^n (1+\lambda_i) = \frac{n + \mathrm{tr}\,\mathrm{S}}{2^k}$. Ainsi, $\mathrm{N}(\mathrm{R} - \mathrm{U}_k) \leqslant \frac{n + \mathrm{tr}\,\mathrm{S}}{2^k}$.

Q38. Ceci montre que $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{N}(\mathrm{R} - \mathrm{U}_k) = 0$ donc que la suite (U_k) converge vers R.