

## CORRIGÉ : TROIS EXERCICES (CC INP PC 2021)

## EXERCICE 1

### Les urnes de Pólya

#### Partie I – Préliminaires

**Q1.**  $X_1$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{b}{b+r}$ .

**Q2.**  $(X_2 | X_1 = 1)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{b+1}{b+r+1}$ . D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{b+1}{b+r+1} \frac{b}{b+r} + \frac{b}{b+r+1} \frac{r}{b+r} = \frac{b}{b+r}$$

On constate que  $X_2$  suit la même loi que  $X_1$ .

**Q3.** La variable aléatoire  $S_n$  est égale au nombre de boules blanches dans l'urne après  $n$  tirages.  $S_n$  est donc à valeurs dans  $\llbracket b, b+n \rrbracket$ .

#### Partie II – La loi de $X_n$

**Q4.** Après  $n$  tirages il y a  $b+r+n$  boules dans l'urne donc  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}$ .

**Q5.** D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k) \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{b+r+n} \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(S_n = k) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$$

**Q6.** Montrons alors par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  que  $X_n$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{b}{b+r}$  :

- le résultat est acquis pour  $n = 1$  d'après la question 1 ;
- si  $n \geq 1$ , on suppose le résultat acquis jusqu'au rang  $n$ . Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(S_n) = b + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = b + \frac{nb}{b+r} = \frac{b(b+r+n)}{b+r}$$

donc  $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{b}{b+r}$  ; la récurrence se propage.

#### Partie III – La loi de $S_n$ dans un cas particulier

**Q7.**  $S_n = 1$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_k = 0$  donc  $[S_n = 1] = \bigcap_{1 \leq k \leq n} [X_k = 0]$ .

**Q8.** On a  $[S_{n+1} = 1] = [S_n = 1] \cap [X_{n+1} = 0]$  donc  $\mathbb{P}(S_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | S_n = 1)\mathbb{P}(S_n = 1) = \frac{n+1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = 1)$ . Sachant que  $\mathbb{P}(S_0 = 1) = 1$  on en déduit par récurrence que  $\mathbb{P}(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$ .

**Q9.** On a  $S_{n+1} = S_n$  ou  $S_{n+1} = S_n + 1$  donc

– si  $\ell \notin \{k-1, k\}$ ,  $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = 0$ ;

– si  $\ell = k-1$ ,  $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k-1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k-1) = \frac{k-1}{n+2}$ ;

– si  $\ell = k$ ,  $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | S_n = k) = \frac{k-1}{n+2} = 1 - \frac{k}{n+2}$ .

**Q10.** D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k-1)\mathbb{P}(S_n = k-1) + \mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k)\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \frac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$$

**Q11.** Montrons alors par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  que  $S_n$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  :

– c'est évident pour  $n = 0$ ;

– si  $n \geq 0$ , on suppose le résultat acquis au rang  $n$ . Pour tout  $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}(S_n = k-1) = \frac{1}{n+1}$  donc

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{k-1}{n+2} \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$$

Ce résultat reste vrai pour  $k = 1$  (question 8) et puisque  $S_{n+1}$  est à valeurs dans  $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

On a prouvé que  $S_{n+1}$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$ , la récurrence se propage.

## EXERCICE 2

### Résolution d'une équation fonctionnelle

#### Partie I – Existence et unicité de la solution du problème (P)

##### I.1 - Existence de la solution

**Q12.** Fixons  $x > 0$ . On a  $|\varphi_k(x)| = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . La série  $\sum \frac{1}{k^2}$  converge donc la série  $\sum \varphi_k$  converge absolument et donc simplement sur  $]0, \infty[$ .

**Q13.** Pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2} - \varphi(x)$ .

**Q14.** Pour tout  $x > 0$ , la suite  $\left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est décroissante et tend vers 0 donc d'après le critère spécial relatif aux séries alternées,  $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$ .

**Q15.** Pour  $n = 0$  on obtient :  $|\varphi(x) - \varphi_0(x)| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$  donc  $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$ . Ainsi,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  et d'après la question 13,  $\varphi$  est solution de (P).

##### I.2 - Unicité de la solution

**Q16.** Montrons le résultat demandé par récurrence sur  $n$  :

– si  $n = 0$  le résultat est vrai car  $f$  est solution de (P) donc  $f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x}$ ;

– si  $n \geq 1$ , supposons le résultat acquis au rang  $n-1$  :  $f(x) = (-1)^n f(x+n) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ .

D'après (P),  $f(x+n) = -f(x+n+1) + \frac{1}{(x+n)^2}$  donc  $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$  : la récurrence se propage.

**Q17.** Sachant que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x+n+1) = 0$  car  $f$  est solution de (P), on en déduit en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  :  $\forall x > 0$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$ . Nous avons prouvé que  $\varphi$  est l'unique solution de (P).

## Partie II – Étude de la solution du problème (P)

**Q18.** Soit  $\epsilon > 0$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\|\varphi_k\|_{\infty, [\epsilon, +\infty[} = \frac{1}{(k+\epsilon)^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . La convergence de la série  $\sum \varphi_k$  est normale, et donc uniforme, sur  $[\epsilon, +\infty[$ .

**Q19.** Sachant que  $\varphi_k$  est continue pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on en déduit que  $\varphi$  est continue sur tout intervalle  $[\epsilon, +\infty[$ , puis sur  $]0, +\infty[$  par recouvrement.

On a  $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \varphi(x+1)$  avec  $\lim_0 \varphi(x+1) = \varphi(1)$  car  $\varphi$  est continue en 1, donc  $\varphi(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$ .

**Q20.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_k$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ , et  $\varphi'_k(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\|\varphi'_k\|_{\infty, [\epsilon, +\infty[} = \frac{2}{(\epsilon+k)^3} = O\left(\frac{1}{k^3}\right)$  donc la convergence de  $\sum \varphi'_k$  est normale, et donc uniforme, sur  $[\epsilon, +\infty[$ .

On en déduit que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout intervalle  $[\epsilon, +\infty[$ , puis sur  $]0, +\infty[$  par recouvrement, et que pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

**Q21.** La série définissant  $\varphi'$  vérifie les hypothèses du critère spécial relatif aux séries alternées donc  $\varphi'(x)$  est du signe de son premier terme, à savoir  $\varphi'(x) \leq 0$ . La fonction  $\varphi$  est donc décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

**Q22.** On a donc pour tout  $x > 0$ ,  $2\varphi(x+1) \leq \varphi(x) + \varphi(x+1) \leq 2\varphi(x)$  donc  $2\varphi(x+1) \leq \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x)$ . En ré-indexant la première de ces deux inégalités on obtient pour tout  $x > 1$ ,  $2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$ , donc pour tout  $x > 1$ ,  $\frac{1}{x^2} \leq \varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$ . On en déduit que  $\varphi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ .

## Partie III – Expression intégrale de la solution du problème (P)

**Q23.** Soit  $x > 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x+k-1 > -1$  donc on peut choisir un réel  $\alpha$  vérifiant  $x+k-1 > \alpha > -1$ . On a alors  $|t^{x+k-1} \ln(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} O(t^{-\alpha})$ . La fonction  $t \mapsto t^{-\alpha}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ , donc la fonction  $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$  aussi.

Considérons le schéma d'intégration par parties suivant : 
$$+ \begin{vmatrix} \ln(t) & t^{x+k-1} \\ \frac{1}{t} & \frac{t^{x+k}}{x+k} \end{vmatrix}.$$
 Par croissances comparées  $\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t) \frac{t^{x+k}}{x+k} = 0$

donc l'intégration par parties est licite : 
$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = \left[ \ln(t) \frac{t^{x+k}}{x+k} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+k-1}}{x+k} dt = \frac{-1}{(x+k)^2}.$$

**Q24.** Appliquons le théorème d'intégration terme à terme :

– pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$  est continue par morceaux et intégrable sur  $]0, 1]$ ;

– la série  $\sum_{k \geq 0} t^{x+k-1} \ln(t)$  converge simplement sur  $]0, 1]$  et sa somme  $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$  est continue par morceaux sur  $]0, 1]$ ;

$$- \int_0^1 |t^{x+k-1} \ln(t)| dt = - \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = \frac{1}{(x+k)^2}.$$

La série  $\sum \frac{1}{(x+k)^2}$  converge donc le théorème s'applique : la fonction  $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$  est intégrable sur  $]0,1[$ , et  $\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\varphi(x)$ .

### EXERCICE 3

## Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

### Partie I – Approximation de la racine carrée d'un réel positif

#### I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

**Q25.** Pour tout  $k \geq 1$ ,  $f_k(x)^2 - x = \frac{1}{4} \left( f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right)^2 \geq 0$ . Puisque  $f_k(x) \geq 0$ , on en déduit que  $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ .

**Q26.** Pour tout  $k \geq 2$ ,  $f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{x - f_{k-1}(x)^2}{2f_{k-1}(x)} \geq 0$  donc la suite  $(f_k(x))_{k \geq 1}$  est décroissante.

**Q27.** La suite  $(f_k(x))_{k \geq 1}$  est décroissante et minorée par  $\sqrt{x}$  donc converge vers une limite  $\ell(x) \geq \sqrt{x}$ , limite qui vérifie :  $\ell(x) = \frac{1}{2} \left( \ell(x) + \frac{x}{\ell(x)} \right)$  soit  $\ell(x)^2 = x$ . Puisque  $\ell(x) \geq \sqrt{x}$  on en déduit que  $\ell(x) = \sqrt{x}$ .

#### I.2 - Majoration de l'erreur

**Q28.** On calcule  $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{(f_k(x) - \sqrt{x})^2}{2f_k(x)} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{f_k(x)} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left( 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right)$ .

**Q29.** Sachant que pour tout  $k \geq 1$ ,  $f_k(x) \geq \sqrt{x}$  on en déduit que  $f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leq \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}$  puis par récurrence que pour tout  $k \geq 1$ ,  $0 \leq f_k(x) - \sqrt{x} \leq \frac{f_1(x) - \sqrt{x}}{2^{k-1}}$ . Mais  $f_1(x) = \frac{1+x}{2}$  donc en définitive,  $|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}$ .

### Partie II – Généralités sur les racines carrées d'une matrice

**Q30.** Si  $A = B^2$  alors  $\det A = (\det B)^2 \geq 0$ .

**Q31.** Posons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , et supposons  $B^2 = A$ . En développant on obtient les conditions

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 1 \\ c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$$

Les égalités 2 et 3 imposent  $c = 0$ . Mais alors les deux autres donnent  $a = d = 0$ , incompatibles avec la seconde. Il n'existe donc pas de matrice  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A = B^2$ , alors que  $\det A = 0 \geq 0$ . La réciproque du résultat établi à la question 30 est donc fausse.

**Q32.**  $S$  est symétrique réelle donc diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (avec une matrice de passage orthogonale).

**Q33.**  $P$  est orthogonale donc  $P^{-1} = P^T$ , et ainsi  $R^T = (P \Delta P^T)^T = P \Delta^T P^T = P \Delta P^T = R$  donc  $R$  est symétrique. De plus,  $R^2 = P \Delta^2 P^T = P D P^T = S$  donc  $R$  est une racine carrée de  $S$ .

## Partie III – Approximation d’une racine carrée d’une matrice symétrique

**Q34.**  $PI_nP^{-1} = I_n \in \mathcal{D}_n^+$  donc  $I_n \in \mathcal{C}_p$ .

Si  $M \in \mathcal{C}_p$  alors  $M$  est semblable à une matrice de  $\mathcal{D}_n^+$ . Or les matrices de cet ensemble ont toutes un déterminant strictement positif donc  $\det M > 0$  :  $M$  est inversible. En outre, les inverses des matrices de  $\mathcal{D}_n^+$  sont dans  $\mathcal{D}_n^+$  donc  $M^{-1} \in \mathcal{C}_p$ .

Enfin,  $P^{-1}(M + SM^{-1})P = P^{-1}MP + P^{-1}SPP^{-1}M^{-1}P = P^{-1}MP + DP^{-1}M^{-1}P$ . Les matrices  $P^{-1}MP$ ,  $D$  et  $P^{-1}M^{-1}P$  sont dans  $\mathcal{D}_n^+$  donc  $P^{-1}(M + SM^{-1})P$  aussi, et ainsi,  $\frac{1}{2}(M + SM^{-1}) \in \mathcal{C}_p$ .

**Q35.** Les calculs précédentes montrent que  $V_k = \frac{1}{2}(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1})$ .

Ainsi, si  $V_{k-1} = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  alors  $V_k = \text{diag}\left(\frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right), \dots, \frac{1}{2}\left(\alpha_n + \frac{\lambda_n}{\alpha_n}\right)\right)$  et sachant que  $V_0 = I_n$  on en déduit par récurrence sur  $k$  que  $V_k = \text{diag}(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n))$ .

**Q36.** Si  $A = P^TBP$  alors  $\text{tr}(AA^T) = \text{tr}(P^TBP P^T B^T P) = \text{tr}(P^T B B^T P) = \text{tr}(B B^T)$  donc  $N(A) = N(B)$  : deux matrices orthogonalement semblables ont même norme.

Puisque  $R - U_k = P(\Delta - V_k)P^T$  on en déduit que  $N(R - U_k) = N(\Delta - V_k)$ .

**Q37.** Pour une matrice  $M$  de  $\mathcal{D}_n^+$  on a  $N(M)^2 = \text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n m_{i,i}\right)^2$  donc  $N(M) \leq \text{tr} M$ .

En particulier,  $V_k - \Delta \in \mathcal{D}_n^+$  (questions 35 et 25) donc  $N(V_k - \Delta) \leq \text{tr}(V_k - \Delta)$ .

Or d’après la question 29,  $f_k(\lambda_i) - \sqrt{\lambda_i} \leq \frac{1 + \lambda_i}{2^k}$  donc  $\text{tr}(V_k - \Delta) \leq \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i) = \frac{n + \text{tr} S}{2^k}$ . Ainsi,  $N(R - U_k) \leq \frac{n + \text{tr} S}{2^k}$ .

**Q38.** Ceci montre que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} N(R - U_k) = 0$  donc que la suite  $(U_k)$  converge vers  $R$ .