Produits infinis

Durée : 4 heures

Les deux premières parties de ce problème établissent des résultats généraux concernant la convergence des produits infinis de nombres réels. La troisième partie détermine un développement de la fonction sinus sous la forme d'un produit infini et en tire quelques conséquences.

Dans tout ce problème, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite d'éléments *non nuls* de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$. Lorsque la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge, on dira que le produit infini $\prod u_k$ converge, et on notera alors $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ la limite de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie I. Généralités

Question 1. Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ pour laquelle la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

Question 2. Prouver que si, pour tout $n \geqslant 1$, $0 < u_n < 1$, le produit infini $\prod u_k$ converge.

Question 3. Justifier la convergence et calculer les produits infinis suivants :

a) $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ *b)* $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ *c)* $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)$

Question 4. Prouver que si la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ non nulle, alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 1.

■ Suites à valeurs positives

On suppose désormais l'existence d'un rang n_0 à partir duquel $u_n > 0$.

Question 5. Montrer que si on pose $\mathrm{Q}_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$, les deux suites $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant n_0}$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).

Question 6. Montrer que si la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ln(u_n)$ est convergente, alors la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge et sa limite est non nulle.

Question 7. On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant n_0} \ln(u_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans ces deux cas la limite de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$.

Partie II. Conditions suffisantes de convergence

Dans cette partie, on pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 + a_n$.

Question 8. On suppose *dans cette question uniquement* que $a_n \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
Démontrer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente si et seulement si la série $\sum a_n$ est convergente.

Vérifier que sous ces conditions, $\prod_{n=1}^{\infty} u_n \geqslant 1$.

Question 9. On suppose *dans cette question uniquement* que la série $\sum a_n$ est convergente.
Montrer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, puis donner une condition nécessaire et suffisante portant sur la nature de la série $\sum a_n^2$ pour que la limite de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ soit non nulle.

On pourra utiliser le développement limité $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Question 10. Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ dans les trois cas suivants :

a) $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^{3/4}}$ *b)* $u_n = 1 + (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ *c)* $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

On pose désormais pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{a_n}{\mathrm{P}_n}$.

Question 11. Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction uniquement de P_n et de P_{n-1}.

Question 12. On suppose *dans cette question uniquement* que la série $\sum a_n^2$ est convergente.

a) Établir que si la série $\sum a_n$ est convergente, il en est de même de la série $\sum v_n$.

b) Réciproquement, la convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$?

Question 13. Déterminer une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

Question 14. Prouver enfin que si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ converge et est non nul.

Partie III. Expression de la fonction sinus comme produit infini

■ Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \,\mathrm{d}t$.

Question 15. Calculer les valeurs de I_0 et I_1.

Question 16. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.

Question 17. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, et en déduire que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

Question 18. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \times \dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n-2}} = 1 - \dfrac{1}{4n^2}$.

Question 19. En déduire la convergence et la valeur du produit infini $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

■ Une suite de polynômes qui converge vers la fonction sinus

Question 20. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \dfrac{ix}{n}\right)^n = \left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)^{n/2} \exp\left(in \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)$ et en déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{ix}$$

Question 21. En déduire que $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Q}_n(x)$ où $\mathrm{Q}_n(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\left(1 + \dfrac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1 - \dfrac{ix}{2n}\right)^{2n}\right)$.

Question 22. Montrer que Q_n est un polynôme de degré $2n-1$ admettant pour racines les réels $x_k = 2n\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![1-n, n-1]\!]$.

Question 23. En déduire l'existence d'un scalaire non nul λ tel que $\mathrm{Q}_n(x) = \lambda x \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}\right)$.

Question 24. Calculer $\mathrm{Q}_n'(0)$ et en déduire que $\lambda = 1$.

■ Formule d'Euler-Wallis

Pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on considère la fonction $u_k : (n,x) \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4n^2 \tan^2(\frac{k\pi}{2n})} & \text{si } k < n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Question 25. Montrer que $\sin x = \lim\limits_{n\to+\infty} x \prod\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$.

Question 26. *En admettant que l'on puisse intervertir cette limite et ce produit infini*, en déduire que

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

Question 27. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}_n(x) = x \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Simplifier pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$ le quotient $\dfrac{\mathrm{P}_{2n}(2x)}{2\mathrm{P}_n(x)}$ et en déduire le développement en produit infini de la fonction cosinus pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$$

■ Calcul de $\zeta(2)$

Question 28. Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $-t - t^2 \leqslant \ln(1-t) \leqslant -t$.

Question 29. Justifier que pour tout $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ et en déduire que :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right[, \qquad -\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{x^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} \leqslant \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \leqslant -\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Question 30. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ et en déduire la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.