Corrigé : produits infinis

Partie I. Généralités

Question 1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$. Alors $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{n!}$ donc $\lim p_n = 0$.

Question 2. Lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0,1[$, la suite des produit partiels $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est positive et décroissante, donc converge vers une limite ℓ (positive ou nulle).

Question 3. Dans les trois cas la question 2 s'applique et permet d'affirmer que ces produits infinis convergent. On calcule les produits partiels par télescopage avant de passer à la limite.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=0.$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+2}{2}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{2}.$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+3}{k+2}=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+3}{3}$ donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{3}.$

Question 4. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_{n-1}}$ donc lorsque la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \neq 0$, $\lim u_n = 1$.

■ Suites à valeurs positives

Question 5. Pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n_0}\mathrm{Q}_n$ avec $\mathrm{P}_{n_0} \neq 0$, donc les suites $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant n_0}$ ont même nature.

Question 6. La suite $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant n_0}$ est à valeurs strictement positives et $\ln(\mathrm{Q}_n) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_k)$ donc si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}\ln(u_n)$ converge et a pour somme ℓ, alors $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant n_0}$ converge vers $\mathrm{e}^{\ell} > 0$. D'après la question précédente la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\mathrm{P}_{n_0}\,\mathrm{e}^{\ell} \neq 0$.

Question 7. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_n) = +\infty$ alors $\lim\ln(\mathrm{Q}_n) = +\infty$ donc $\lim \mathrm{Q}_n = +\infty$. On en déduit que $\lim \mathrm{P}_n = +\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de P_{n_0}.

Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n_0}^{n}\ln(u_n) = -\infty$ alors $\lim\ln(\mathrm{Q}_n) = -\infty$ donc $\lim \mathrm{Q}_n = 0$. On en déduit que $\lim \mathrm{P}_n = 0$.

Partie II. Conditions suffisantes de convergence

Question 8. Nous avons pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$ donc d'après les questions 6 et 7,

- si $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ converge alors la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $\ell \geqslant 1$;
- si $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ diverge alors la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge ou tend vers 0.

Or ici nous avons pour tout $n \geqslant 1$, $a_n \geqslant 0$ donc $\mathrm{P}_n \geqslant 1$. On en déduit que si la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ alors $\ell \geqslant 1$ et en particulier $\ell \neq 0$.

Ainsi, on est en mesur d'affirmer que la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ converge.

Montrons maintenant que les séries $\displaystyle\sum a_n$ et $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ sont de même nature :

- si $\displaystyle\sum a_n$ converge alors $\lim a_n = 0$ donc $\ln(1+a_n) \sim a_n$ et donc $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ converge ;
- si $\displaystyle\sum\ln(1+a_n)$ converge alors $\lim\ln(1+a_n) = 0$ donc $\lim a_n = 0$ et de nouveau $a_n \sim \ln(1+a_n)$ donc $\displaystyle\sum a_n$ converge.

On peut donc conclure : la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\displaystyle\sum a_n$ converge, et dans ce cas $\lim \mathrm{P}_n \geqslant 1$.

Question 9. Puisque $\sum a_n$ converge on a $\lim a_n = 0$ et donc $\ln(1+a_n) = a_n - b_n$ avec $b_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
La série $\sum b_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, donc deux cas de figure sont envisageables :

- ou bien $\sum a_n^2$ converge, auquel cas $\sum \ln(1+a_n)$ converge car différence de deux séries convergentes et la suite (P_n) converge vers une limite non nulle (question 6) ;
- ou bien $\sum a_n^2$ diverge vers $+\infty$, auquel cas $\sum \ln(1+a_n)$ diverge vers $-\infty$ et la suite (P_n) converge vers 0 (question 7).

Dans tous les cas la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge, mais sa limite n'est strictement positive que si la série $\sum a_n^2$ converge.

Question 10.

a) La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/4}}$ diverge donc d'après la question 8 la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

b) La série $\sum (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère special relatif aux séries alternées ; d'après la question 9 la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. La série $\sum \dfrac{(\ln n)^2}{n}$ diverge car $\dfrac{1}{n} = \mathrm{O}\left(\dfrac{(\ln n)^2}{n}\right)$ donc, toujours d'après la question 9, la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c) La série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge d'après le critère spécial relatif aux séries alternées donc d'après la question 9 la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge. La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc d'après la question 9 la limite de (P_n) est non nulle. Pour la calculer, on considère la quantité $\mathrm{P}_{2n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(\frac{k+(-1)^{k+1}}{k}\right)$ et on distingue les indices pairs des indices impairs :

$$\mathrm{P}_{2n} = \prod_{q=1}^{n}\left(\frac{2q-1}{2q}\right) \times \prod_{q=1}^{n}\left(\frac{2q}{2q-1}\right) = 1.$$

La suite $(\mathrm{P}_{2n})_{n\geqslant 1}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 ; il en est de même de la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ puisque nous avons justifié sa convergence.

Question 11. Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{P}_n = u_n \mathrm{P}_{n-1} = (1+a_n)\mathrm{P}_{n-1}$ donc $v_n = \dfrac{\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n-1}}{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = \dfrac{1}{\mathrm{P}_{n-1}} - \dfrac{1}{\mathrm{P}_n}$.

Question 12.

a) D'après la question 9, si les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ convergent, la suite $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ non nulle. Ainsi, la suite $\left(\dfrac{1}{\mathrm{P}_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$. Or par télescopage $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \frac{1}{\mathrm{P}_1} - \frac{1}{\mathrm{P}_n}$ donc la série $\sum v_n$ converge.

b) En revanche, l'exemple de $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^{3/4}}$ montre que la réciproque est fausse : $a_n = \dfrac{1}{n^{3/4}}$ donc $\sum a_n^2$ converge et $\sum a_n$ diverge, et d'après la question 10a la suite (P_n) diverge vers $+\infty$ donc la série $\sum v_n$ converge.

Question 13. Pour que la série $\sum v_n$ diverge il faut faire en sorte que (P_n) converge vers 0. On peut donc considérer l'exemple de la question 10b : pour $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ la série $\sum a_n$ converge et (P_n) tend vers 0 donc la série $\sum v_n$ diverge.

Question 14. Si la série $\sum |a_n|$ converge il en est de même de la série $\sum a_n$. De plus, $\lim a_n = 0$ donc $a_n^2 = \mathrm{O}(|a_n|)$. Par comparaison de séries positives la série $\sum a_n^2$ est aussi convergente. On peut appliquer donc la question 9 : la suite (P_n) converge vers une limite non nulle.

Partie III. Expression de la fonction sinus comme produit infini

■ Intégrales de Wallis

Question 15. $\mathrm{I}_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = 1$.

Question 16. Réalisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)(\sin t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \Big[-(\cos t)(\sin t)^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2(\sin t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-(\sin t)^2)(\sin t)^{n-2}\,\mathrm{d}t = (n-1)(\mathrm{I}_{n-2}-\mathrm{I}_n)\end{aligned}$$

donc $n\mathrm{I}_n = (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$.

Question 17. Pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\sin t)^{n+1} \leqslant (\sin t)^n$. En intégrant on obtient $0 \leqslant \mathrm{I}_{n+1} \leqslant \mathrm{I}_n$; la suite (I_n) est décroissante.
On en déduit $\mathrm{I}_{n-2} \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_n$; or $\mathrm{I}_{n-2} = \dfrac{n}{n-1}\mathrm{I}_n$ donc $\dfrac{n}{n-1}\mathrm{I}_n \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \mathrm{I}_n$, ce qui prouve par encadrement que $\lim \dfrac{\mathrm{I}_{n-1}}{\mathrm{I}_n} = 1$.

Question 18. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n+1}} \times \dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n-2}} = \dfrac{\mathrm{I}_{2n}}{\mathrm{I}_{2n-2}} \times \dfrac{\mathrm{I}_{2n-1}}{\mathrm{I}_{2n+1}} = \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n+1}{2n} = 1 - \dfrac{1}{4n^2}$ d'après la question 16.

Question 19. Par télescopage, $\displaystyle\prod_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}}}{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}+1}} \times \frac{\mathrm{I}_1}{\mathrm{I}_0} = \frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}}}{\mathrm{I}_{2\mathrm{N}+1}}$ et compte tenu de la question 17, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}$.

■ Une suite de polynômes qui converge vers la fonction sinus

Question 20. Posons $1 + \dfrac{ix}{n} = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.
On a $r = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{n^2}}$ et, sachant que $\mathfrak{Re}\left(1+\dfrac{ix}{n}\right) > 0$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Mais $\tan\theta = \dfrac{x}{n}$ donc $\theta = \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
Ainsi, $\left(1+\dfrac{ix}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{x^2}{n^2}\right)^{n/2}\exp\left(in\arctan\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)$. On a alors :

$$\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{x^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ donc } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n/2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n\arctan\left(\frac{x}{n}\right) = x.$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{ix}$.

Question 21. De la formule $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\mathrm{e}^{-ix}}{2i}$ on déduit que $\sin x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{Q}_n(x)$ avec $\mathrm{Q}_n(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\left(1+\dfrac{ix}{2n}\right)^{2n} - \left(1-\dfrac{ix}{2n}\right)^{2n}\right)$.

Question 22. *A priori* Q_n est un polynôme de degré $2n$; cependant le coefficient du terme en x^{2n} est égal à

$$\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{i}{2n}\right)^{2n} - \left(\frac{-i}{2n}\right)^{2n}\right) = 0 \qquad \text{donc } \deg \mathrm{Q}_n \leqslant 2n-1.$$

Le nombre $x = \dfrac{2n}{i}$ n'est pas racine donc les racines de Q_n vérifient :

$$\left(1+\frac{ix}{2n}\right)^{2n} = \left(1-\frac{ix}{2n}\right)^{2n} \iff \left(\frac{2n+ix}{2n-ix}\right)^{2n} = 1 \iff \frac{2n+ix}{2n-ix} \in \mathbb{U}_{2n} \iff (1+\omega)ix = 2n(\omega-1) \text{ avec } \omega^{2n} = 1$$

On ne peut avoir $\omega = -1$ donc on peut poser $\omega = \mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![-n+1, n-1]\!]$, et dans ce cas $x = \dfrac{2n}{i}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}-1}{\mathrm{e}^{\frac{ik\pi}{n}}+1} = 2n\tan\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)$.
Nous venons d'obtenir $2n-1$ racines pour Q_n donc $\deg \mathrm{Q}_n \geqslant 2n-1$, et compte tenu de la remarque faite plus haut, $\deg \mathrm{Q}_n = 2n-1$.

Question 23. Considérons le polynôme $\widetilde{\mathrm{Q}}_n(x) = x\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}\right)$. Ce polynôme est de degré $2n-1$ et possède les mêmes racines que Q_n, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Q}_n = \lambda\widetilde{\mathrm{Q}}_n$.

Question 24. $Q_n'(0)$ est le coefficient de x dans le développement de Q_n suivant la base canonique. En utilisant la formule du binôme dans l'expression initiale de Q_n on obtient que $Q_n'(0) = \frac{1}{2i}\left(2n\frac{i}{2n} - 2n\frac{-i}{2n}\right) = 1$. En utilisant cette fois l'expression obtenue à la question précédente on obtient $Q_n'(0) = \lambda$, donc $\lambda = 1$ et $Q_n = \widetilde{Q}_n$.

■ Formule d'Euler-Wallis

Question 25. On a $Q_n(x) = x\prod_{k=1}^{n-1} u_k(n,x) = x\prod_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$ puisque $u_k(n,x) = 1$ pour $k \geqslant n$, donc

$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} Q_n(x) = \lim_{n\to+\infty} x\prod_{k=1}^{+\infty} u_k(n,x)$$

Question 26. Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n > k$ on a $u_k(n,x) = 1 - \dfrac{x^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_k(n,x) = 1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$.

En admettant qu'on puisse intervertir limite et produit infini on en déduit $\sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Question 27. Séparons les termes d'indices pairs des termes d'indices impairs :

$$P_{2n}(2x) = 2x\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{k^2\pi^2}\right) = 2x\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k)^2\pi^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{(2x)^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right) = 2x\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$$

donc pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{P_{2n}(2x)}{2P_n(x)} = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

Or d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{P_{2n}(2x)}{2P_n(x)} = \dfrac{\sin(2x)}{2\sin x} = \cos x$ donc $\cos x = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)$.

■ Calcul de $\zeta(2)$

Question 28. La fonction $t \mapsto \ln(1-t)$ est concave sur $]-\infty, 1[$ donc située sous sa tangente en 0, soit : $\forall t < 1$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.
Posons maintenant $f : t \mapsto \ln(1-t) + t + t^2$. La fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1/2]$ et $f'(t) = \dfrac{t(1-2t)}{1-t} \geqslant 0$ donc f est croissante sur $[0, 1/2]$. Or $f(0) = 0$ donc $f(t) \geqslant 0$ sur $[0, 1/2]$, soit encore $-t - t^2 \leqslant \ln(1-t)$.

Question 29. Pour tout $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, pour tout $n \geqslant 1$, $\ln\left(\dfrac{P_n(x)}{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Le terme de gauche converge vers $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ donc la série $\sum \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ converge et par passage à la limite, $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right[$, $-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2} - \dfrac{x^4}{k^4\pi^4} \leqslant \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \leqslant -\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}$.

Les séries $\sum \dfrac{1}{k^2}$ et $\sum \dfrac{1}{k^4}$ convergent donc on peut sommer ces inégalités pour obtenir

$$-\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{x^4}{\pi^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4} \leqslant \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \leqslant -\frac{x^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

Question 30. $\dfrac{\sin x}{x} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$ donc $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = -\dfrac{1}{6}$.

Mais d'après la question précédente, $-\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{x^2}{\pi^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^4} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) \leqslant -\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$ donc en faisant tendre x vers 0 on obtient : $-\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} \leqslant -\dfrac{1}{6} \leqslant -\dfrac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2}$ soit encore $\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.