# Matrices semblables à leur inverse (Mines PC 2025)

Durée : 4 heures

### Notations et définitions

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille $n$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille $n$.
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont *semblables* si

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}), \quad A = P^{-1}BP$$

Pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le polynôme caractéristique de A est défini par

$$\chi_A = \det(XI_n - A)$$

## 1 – Polynômes réciproques

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p$ est dit *réciproque* lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$$

**1** ▷ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p$. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots, a_p$ sont des nombres complexes et $a_p \neq 0$.
Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier $k$, $0 \leqslant k \leqslant p$, on a l'égalité $a_k = a_{p-k}$.

**2** ▷ Soit P un polynôme de degré $p$ écrit sous forme factorisée $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X-\lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont des racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.
Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P\left(\frac{1}{X}\right)$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier $i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, $\lambda_i$ est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité $m_i$.

**3** ▷ Soit Q un polynôme de degré $p$. On dit que Q est *antiréciproque* si

$$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$.

Soit R un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

*toute racine a de* R *est non nulle et* $\frac{1}{a}$ *est racine de* R *de même multiplicité que a.*

**4** ▷ Démontrer que le produit des racines de R comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou $-1$. *On pourra remarquer que l'égalité* $a = \frac{1}{a}$ *n'a lieu que pour* $a = 1$ *ou* $-1$.

**5** ▷ En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

## 2 – Le cas diagonalisable

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

**6** ▷ Soit $x$ un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de $x$, $\det A$ et $\det\left(\frac{1}{x}I_n - A^{-1}\right)$.

**7** ▷ On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse. Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A, et en déduire que $\chi_A$ est soit réciproque soit antiréciproque.

**8** ▷ Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque. Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

**9** ▷ Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à son inverse (bien que son polynôme caractéristique $(X-2)^2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$ soit réciproque). *On pourra déterminer les espaces propres de* B *et* $B^{-1}$ *pour la valeur propre* 2.

*Ainsi, hors du cas diagonalisable, le polynôme caractéristique ne suffit pas à caractériser les matrices semblables à leur inverse. La suite du problème propose de caractériser ces matrices par une autre méthode.*

## 3 – Produits de matrices de symétries

On dit qu'un endomorphisme $f$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une *symétrie* si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
On dit qu'une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice de symétries si $S^2 = I_n$.

**10** ▷ Démontrer que si $S_1$ et $S_2$ sont deux matrices de symétrie, la matrice produit $A = S_1 S_2$ est inversible et semblable à son inverse.

**11** ▷ Si A est un produit de deux matrices de symétries, en est-il de même pour toute matrice semblable à A ?

*Soit* B *et* C *deux matrices de* $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ *la matrice définie par blocs suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} B & O_n \\ O_n & C \end{pmatrix} \qquad \text{où } O_n \text{ désigne la matrice nulle de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

**12** ▷ Soit $S_1$ la matrice par blocs

$$S_1 = \begin{pmatrix} O_n & P \\ Q & O_n \end{pmatrix}$$

où P, Q sont deux éléments de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
Déterminer les conditions reliant B, C, P, Q pour que les matrices $S_1$ et $S_2 = S_1 A$ soient des matrices de symétries.

**13** ▷ En déduire que si C est semblable à $B^{-1}$, alors A est un produit de deux matrices de symétries.

## 4 – La matrice $J_n(\lambda)$.

**14** ▷ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n$. Soit $g$ un endomorphisme de E tel que $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$.
Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de $g$ est la matrice N ci-après :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $N = (n_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec $n_{i,j} = 1$ si $j = i+1$ et $n_{i,j} = 0$ sinon.

**15** ▷ Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul, on pose $J_n(\lambda) = \lambda I_n + N$.

Démontrer que $J_n(\lambda)$ est inversible et déterminer en fonction de N et de $\lambda$ la matrice N′ telle que $J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n + N'$.

**16** ▷ Montrer que $(N')^n = 0$ et $(N')^{n-1} \neq 0$ et en déduire que $J_n(\lambda)^{-1}$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

*Pour tout polynôme* $P = P(X) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ *on pose*

$$\begin{cases} s_1(P) &= P(-X) \\ s_2(P) &= P(1-X) \\ g(P) &= P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

*On définit ainsi les trois endomorphismes de l'espace vectoriel* $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, *(il n'est pas demandé de le prouver).*

**17** ▷ Calculer $s_1^2$, $s_2^2$ et exprimer $s_1 \circ s_2$ en fonction de $g$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

**18** ▷ Soit P un polynôme non constant. Exprimer le degré du polynôme $g(P)$ en fonction du degré de P.

**19** ▷ Déduire des questions précédentes que la matrice $J_n(1)$ est un produit de deux matrices de symétries.

*On pourrait démontrer par le même type de raisonnement, et on l'admet, que la matrice* $J_n(-1)$ *est un produit de deux matrices de symétries.*

## 5 – Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse

Soit A une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On admet le résultat suivant : A *est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme*

$$A' = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

*où les* $\lambda_i$ *sont les valeurs propres de* A *(pas nécessairement distinctes) et* $r$ *ainsi que les* $n_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ *des entiers naturels non nuls. De plus la matrice* $A'$ *est unique à l'ordre près des blocs.*

**20** ▷ Démontrer que $A^{-1}$ est semblable à $\begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix}$.

**21** ▷ En utilisant les résultats établis dans les parties précédentes, démontrer que si A est semblable à son inverse alors A est un produit de deux matrices de symétries.

Fin du problème