Corrigé : matrices semblables à leur inverse (Mines PC 2025)

1 – Polynômes réciproques

1 ▷ Si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ alors $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} a_{p-k} X^k$ donc P est réciproque si et seulement si pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $a_{p-k} = a_k$.

2 ▷ Si $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$ alors $X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = a_p \prod_{i=1}^{p} (1 - \lambda_i X)^{m_i}$.

Si l'un des λ_i est nul, on peut supposer sans perte de généralité $\lambda_d = 0$ et alors $\deg X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = p - m_d$ donc P ne peut être réciproque.

Ainsi, si P est réciproque on peut écrire $P = a_p \prod_{i=1}^{d} (-\lambda_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{d} \left(X - \frac{1}{\lambda_i}\right)^{m_i}$ et $\frac{1}{\lambda_i}$ est bien racine de P de multiplicité m_i.

3 ▷ Si Q est antiréciproque alors $Q(1) = -Q(1)$ donc $Q(1) = 0$. Posons donc $Q = (X-1)P$.

On a alors $-X^p Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^{p-1}(X-1)P\left(\frac{1}{X}\right)$ donc $X^{p-1} P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$. P étant de degré $p-1$ on en déduit que P est réciproque.

4 ▷ 1 et -1 étant leurs propres inverses, il existe une famille de nombres complexes (éventuellement vide) $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ et des entiers $m_1, \dots, m_d, n, p$ tels que $R = \lambda (X-1)^n (X+1)^p \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i)^{m_i} \left(X - \frac{1}{\alpha_i}\right)^{m_i}$. Le produit des racines de P, comptées avec leurs multiplicités respectives, vaut $1^n (-1)^p \prod_{i=1}^{d} \alpha_i^{m_i} \left(\frac{1}{\alpha_i}\right)^{m_i} = (-1)^p$.

5 ▷ Avec les mêmes notations, $X^p R\left(\frac{1}{X}\right) = \lambda (1-X)^n (1+X)^p \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \alpha_i X\right)^{m_i} \left(1 - \frac{X}{\alpha_i}\right)^{m_i} = (-1)^n R(X)$ donc R est réciproque si n est pair, et antiréciproque si n est impair.

2 – Le cas diagonalisable

6 ▷ On a $\det(xI_n - A) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x} A\right) = x^n (\det A) \det\left(A^{-1} - \frac{1}{x} I_n\right) = (-x)^n (\det A) \det\left(\frac{1}{x} I_n - A^{-1}\right)$.

7 ▷ Si A est semblable à son inverse alors $\det A = \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ donc $\det A = \pm 1$.

D'après la question précédente, $X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^n (\det A) \chi_{A^{-1}}(X)$. Or deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique donc si A est semblable à son inverse alors $X^n \chi_A\left(\frac{1}{X}\right) = (-1)^n (\det A) \chi_A(X) = \pm \chi_A(X)$. Ce polynôme est donc réciproque ou antiréciproque suivant la valeur de n et de $\det A$.

8 ▷ D'après la première partie, un polynôme réciproque ou antiréciproque ne peut admettre 0 comme racine, donc 0 n'est pas valeur propre de B et par conséquent cette matrice est inversible.

D'après la question 6, pour tout $x \neq 0$, $\chi_B(x) = (-x)^n (\det B) \chi_{B^{-1}}(1/x)$ mais aussi, étant réciproque ou antiréciproque, $\chi_B(x) = \pm x^n \chi_B(1/x)$ donc $(-1)^n (\det B) \chi_{B^{-1}}(1/x) = \pm \chi_B(1/x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et s'agissant de polynômes unitaires, on en déduit que $\chi_{B^{-1}} = \chi_B$.

Or deux matrices diagonalisables et de mêmes polynômes caractéristiques sont semblables (mêmes valeurs propres, mêmes multiplicités), donc B est semblable à B^{-1}.

9 ▷ On calcule $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\dim \operatorname{Ker}(B - 2I) = 2$ alors que $\dim \operatorname{Ker}(B^{-1} - 2I) = 1$. Les matrices $B - 2I$ et $B^{-1} - 2I$ ne sont pas de même rang donc ne peuvent être semblables ; il en est donc de même de B et B^{-1}.

3 – Produits de matrices de symétries

10 ▷ Si S est une matrice de symétrie alors S est inversible d'inverse $S^{-1} = S$ donc si $A = S_1S_2$ alors A est inversible et $A^{-1} = S_2S_1$.
Mais on peut alors écrire $S_1AS_1^{-1} = S_1AS_1 = S_2S_1 = A^{-1}$ donc A et A^{-1} sont semblables.

11 ▷ Supposons B semblable à A : alors $B = PAP^{-1} = PS_1S_2P^{-1}$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On peut alors écrire $B = S_1'S_2'$ avec $S_1' = PS_1P^{-1}$ et $S_2' = PS_2P^{-1}$ qui sont aussi des matrices de symétries, puisque $S_i'^2 = I$ donc B est aussi produit de deux matrices de symétries.

12 ▷ Un calcul par blocs donne $S_1^2 = \begin{pmatrix} PQ & O \\ O & QP \end{pmatrix}$ et $S_2^2 = \begin{pmatrix} PCQB & O \\ 0 & QBPC \end{pmatrix}$ donc S_1 et S_2 sont des matrices de symétries si et seulement si $Q = P^{-1}$ et $B^{-1} = PCP^{-1}$.

13 ▷ Supposons C semblable à B^{-1} : il existe alors $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $B^{-1} = PCP^{-1}$. Alors en posant $S_1 = \begin{pmatrix} O & P \\ P^{-1} & O \end{pmatrix}$ et $S_2 = S_1A$ la question précédente montre que S_1 et S_2 sont des matrices de symétries, et on a bien $S_1S_2 = S_1^2A = A$ donc A est bien produit de deux matrices de symétries.

4 – La matrice $J_n(\lambda)$

14 ▷ Soit $x \in E$ tel que $g^{n-1}(x) \neq 0_E$ et $(e_1, \dots, e_n) = \left(g^{n-1}(x), \dots, g(x), x\right)$.
Un résultat très classique (que je ne reprend pas) montre que (e) est une famille libre donc une base de E, et pour cette base, $\mathrm{Mat}_{(e)}(g) = N$.

15 ▷ $\det J_n(\lambda) = \lambda^n \neq 0$ donc $J_n(\lambda)$ est inversible.
Commençons par rappeler un résultat classique : si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $M^n = 0$ alors par télescopage $(I_N - M)\sum_{k=0}^{n-1} M^k = I_n - M^n = I$ donc $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} M^k$.
Or $J_n(\lambda) = \lambda\left(I_n + \frac{1}{\lambda}N\right)$ donc en appliquant ce résultat avec $M = \frac{1}{\lambda}N$ on obtient :

$$J_n(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^k}N^k = \frac{1}{\lambda}I_n + N' \qquad \text{avec} \qquad N' = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}N^k$$

16 ▷ On a $N' = NM$ avec $M = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}N^{k-1}$.
M est un polynôme en N donc commute avec N. Ainsi $(N')^n = N^nM^n = 0$ car $N^n = 0$.
De plus, $M = \frac{1}{\lambda^2}I_n + M'$ avec $M' = N\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}N^{k-2}$ donc $(M')^n = 0$. Le rappel donné à la question précédente montre donc que M est une matrice inversible. Mais alors $(N')^{n-1} = N^{n-1}M^{n-1}$ apparaît comme le produit d'une matrice non nulle et d'une matrice inversible donc est non nul.
D'après la question 14, on en déduit que N′ est semblable à N : il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $N' = PNP^{-1}$ et alors $J_n(\lambda)^{-1} = P\left(\frac{1}{\lambda}I_n + N\right)P^{-1}$, ce qui montre que $J_n(\lambda)$ est semblable à $J_n\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

17 ▷ Pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $s_1^2(P) = s_1\left(s_1(P)\right) = s_1\left(P(-X)\right) = P\left(-(-X)\right) = P(X)$ donc $s_1^2 = \mathrm{Id}$.
De même, $s_2^2(P) = s_2\left(P(1-X)\right) = P\left(1-(1-X)\right) = P(X)$ donc $s_2^2 = \mathrm{Id}$.
Enfin, $s_1 \circ s_2(P) = s_1\left(P(1-X)\right) = P(1+X) = g(P) + P$ donc $s_1 \circ s_2 = g + \mathrm{Id}$.

18 ▷ Pour tout $k \geqslant 1$ on a $g(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}X^j$ donc $\deg g(X^k) = k-1$. On en déduit que pour tout polynôme R on a $\deg g(R) < \deg R$.
Posons maintenant $P = a_dX^d + R$ avec $a_d \neq 0$ et $\deg R < d$. Alors $g(P) = a_dg(X^d) + g(R)$ avec $\deg g(X^d) = d-1$ et $\deg g(R) < d-1$ donc $\deg g(P) = d - 1 = \deg P - 1$.

19 ▷ D'après la question précédente on peut affirmer que pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ on a $g^n(P) = 0$, et aussi que $g^{n-1}(X^{n-1}) \neq 0$. Autrement dit, $g^n = 0$ et $g^{n-1} \neq 0$. D'après la question 14 il existe donc une base B de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ telle que $\mathrm{Mat}_B(g) = N$ et donc que $\mathrm{Mat}_B(\mathrm{Id} + g) = I_n + N = J_n(1)$.
Or d'après la question 17 s_1 et s_2 sont deux symétries et $\mathrm{Id} + g = s_1 \circ s_2$ donc $J_n(1) = S_1 S_2$ où $S_i = \mathrm{Mat}_B(s_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$: la matrice $J_n(1)$ est bien le produit de deux matrices de symétries.

5 – Une caractérisation des matrices semblables à leur inverse

20 ▷ D'après la question 16, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$ les matrices $J_{n_k}(\lambda_k)^{-1}$ et $J_{n_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$ sont semblables donc il existe $P_k \in \mathcal{GL}_{n_k}(\mathbb{C})$ tel que $P_k^{-1} J_{n_k}(\lambda_k)^{-1} P_k = J_{n_k}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$. Considérons alors la matrice par blocs $P = \mathrm{diag}(P_1, \dots, P_r)$. C'est une matrice inversible d'inverse $P^{-1} = \mathrm{diag}(P_1^{-1}, \dots, P_r^{-1})$ et un calcul par blocs donne

$$P^{-1}(A')^{-1}P = P^{-1}\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2)^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r)^{-1} \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} J_{n_1}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}\left(\frac{1}{\lambda_r}\right) \end{pmatrix} = B'$$

Et puisque A est semblable à A′, la matrice A^{-1} est semblable à $(A')^{-1}$ et donc à la matrice B′.

21 ▷ Si A est semblable à A^{-1}, les matrices A′ et B′ sont semblables. D'après le résultat admis de cette partie et en particulier l'unicité à permutation près des blocs on peut affirmer que chaque λ_i est :

- ou bien égal à 1 ;
- ou bien égal à −1 ;
- ou alors il existe $j \neq i$ tel que $n_j = n_i$ et $\lambda_j = \frac{1}{\lambda_i}$.

Chacun des blocs $J_{n_i}(1)$ et $J_{n_i}(-1)$ peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétries d'après la question 19.
Chaque bloc $\begin{pmatrix} J_{n_i}(\lambda_i) & O_{n_i} \\ O_{n_i} & J_{n_i}\left(1/\lambda_i\right) \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétries d'après les questions 16 et 13.
De ceci il résulte par un calcul par blocs que la matrice A′ peut s'écrire comme un produit de deux matrices de symétries. Enfin, la question 11 a montré que puisque A est semblable à A′, la matrice A peut elle aussi s'écrire comme produit de deux matrices de symétries.

Avec la question 10, nous venons donc de démontrer qu'une matrice A de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est semblable à son inverse si et seulement si elle peut s'écrire comme produit de deux matrices de symétries.