

ÉTUDE D'UNE CLASSE D'ENDOMORPHISMES (CC INP PSI 2026 – EXTRAIT)

Durée : 4 heures

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, par convention $u^0 = \text{Id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note :

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $F_1, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E . Lorsque la somme $F_1 + \cdots + F_k$ est directe, on la note $\bigoplus_{i=1}^k F_i$. Par convention, si $k = 0$ (cas d'une somme vide), la somme vaut $\{0\}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}_p[X]$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à p .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On admet que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et des sous-espaces vectoriels $D_1, \dots, D_p, P_1, \dots, P_q$ de E stables par u , les D_i étant de dimension 1 et les P_j de dimension 2, tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q P_j.$$

- (ii) il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p + 2q = n$ et une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs de taille 1 ou 2. Autrement dit,

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \exists (H_1, \dots, H_q) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})^q : \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_p & & \\ & & & H_1 & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & H_q \end{pmatrix}.$$

Dans tout le problème, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes de E qui vérifient (i) ou (ii).

Objectif du problème

L'objet de ce problème est d'étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{D}$. Après avoir étudié deux exemples dans la partie I, on étudie dans la partie II les endomorphismes nilpotents de $\mathcal{D}$. Dans la partie III, on démontre un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$ faisant intervenir des polynômes annulateurs.

Partie I – Deux exemples

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{K}_2[X]$. On définit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$u : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & X^2 P'' + P' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v : \begin{pmatrix} E & \rightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{pmatrix}$$

Étude de u

Q1. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$. Est-elle diagonalisable ?

Q2. Déterminer $\text{Ker}(u^2)$ et justifier que $\text{Ker}(u^2)$ est un sous-espace vectoriel stable par u .

Q3. Donner une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et conclure que $u \in \mathcal{D}$.

Étude de v

Q4. Donner la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Q5. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 stables par v .

Q6. Montrer que $\mathbb{K}_1[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 2 stable par v .

Q7. En déduire que $v \notin \mathcal{D}$.

Q8. $\mathcal{D}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

Partie II – Le cas des endomorphismes nilpotents

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Dans ce cas, le plus petit entier naturel k vérifiant $u^k = 0$ est appelé *indice de nilpotence* de u .

Dans la suite, on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des endomorphismes de E nilpotents et on pose : $\mathcal{N}_2 = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u^2 = 0\}$.

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{N}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice $k \in \mathbb{N}^*$ et de rang $r \in \mathbb{N}$.

On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Le cas $n = 1$

Q9. Que dire de u si $\dim E = 1$?

Le cas $n = 2$

On suppose dans ce cas que $\dim E = 2$ et que u est non nul.

Q10. Soit $x \in E$ tel que $u^{k-1}(x) \neq 0$. Justifier que $(u^{k-1}(x), u^{k-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre.

Q11. En déduire que $k = 2$, puis que $u \in \mathcal{N}_2$.

Le cas général

E désigne maintenant un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Q12. Montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_2$.

Soit $u \in \mathcal{N}_2$.

Q13. Justifier que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et que $r \leq n - r$.

Q14. Notons $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(u)$ que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\text{Ker}(u)$. Soient $f_1, \dots, f_r \in E$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u(f_i) = e_i$.

Montrer que la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est une base de E .

Q15. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} O_{n-2r} & (0) & & \\ & J & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J \end{pmatrix}$$

où O_{n-2r} désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{K})$ et où les autres blocs diagonaux égaux à J sont en nombre r .

Q16. En déduire que $\mathcal{N}_2 = \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$.

Partie III – Un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$

Dans toute cette partie, $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme quelconque.

On souhaite montrer que s'il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples ou doubles, alors $u \in \mathcal{D}$.

Q17. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. On définit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K}_1[X]^2 & \rightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ (A, B) & \mapsto & (X-a)^2 A + (X-b)^2 B \end{pmatrix}$$

Montrer que φ est un isomorphisme. En déduire l'existence d'un couple $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que :

$$(X-a)^2 A + (X-b)^2 B = 1.$$

Q18. Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, $\text{Ker}((u - a\text{Id})^2) \cap \text{Ker}((u - b\text{Id})^2) = \{0_E\}$.

Soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^q$ deux familles de scalaires telles que les $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont distincts. On notera que l'une des deux familles $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ peut éventuellement être vide.

Q19. Justifier que la somme : $\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id})$ est directe.

Q20. Montrer que la somme : $\bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$ est directe. On pourra procéder par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

Q21. Soit :

$$P = \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^q (X - \beta_j)^2 \in \mathbb{K}[X]. \quad (1)$$

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ on note P_i , Q_j et R_j les polynômes tels que :

$$P = (X - \alpha_i)P_i, \quad P = (X - \beta_j)Q_j, \quad P = (X - \beta_j)^2 R_j.$$

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q, R_1, \dots, R_q)$ est libre. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$.

On suppose à partir de maintenant que le polynôme P défini en (1) est annulateur de u .

Q22. En décomposant le polynôme constant égal à 1 sur la base $\mathcal{B}$, justifier que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2).$$

Q23. Conclure que $u \in \mathcal{D}$. On pourra utiliser le résultat de la question 16.