

CORRIGÉ : ÉTUDE D'UNE CLASSE D'ENDOMORPHISMES (CC INP PSI 2026 – EXTRAIT)

Partie I – Deux exemples

Étude de u

Q1. On calcule $u(1) = 0$, $u(X) = 1$ et $u(X^2) = 2X^2 + 2X$ donc $\text{Mat}_{\text{can}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

0 est valeur propre d'ordre 2 mais $\text{rg}(u) = 2$ donc $\dim \text{Ker}(u) = 1$: u n'est pas diagonalisable.

Q2. $\text{Mat}_{\text{can}}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\dim \text{Ker}(u^2) = 2$ et $\text{Ker}(u^2) = \text{Vect}(1, X)$.

$u(1) = 0 \in \mathbb{K}_1[X]$ et $u(X) = 1 \in \mathbb{K}_1[X]$ donc $\text{Ker}(u^2) = \mathbb{K}_1[X]$ est stable par u .

Q3. Cherchons un polynôme $P = a + bX + cX^2$ vérifiant $u(P) = 2P$, ce qui revient à résoudre $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}$. On trouve aisément la solution (non unique) $P = 1 + 2X + X^2$.

La famille $\mathcal{B} = (P, 1, X)$ est une base car échelonnée en degré dans $\mathbb{K}_2[X]$ et pour celle-ci $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La forme obtenue pour cette matrice montre d'après la caractérisation (ii) que $u \in \mathcal{D}$.

Q4. On a cette fois $\text{Mat}_{\text{can}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Q5. Un sous-espace de dimension 1 stable par v est engendré par un polynôme *non nul* P vérifiant $v(P) \in \text{Vect}(P)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P' = \lambda P$. Ceci n'est possible que si $\lambda = 0$ car $\deg P' < \deg P$, donc le seul sous-espace de dimension 1 stable par v est $\text{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X]$.

Q6. Pour tout $P \in \mathbb{K}_1[X]$, $P' \in \mathbb{K}_1[X]$ donc $\mathbb{K}_1[X]$ est un sous-espace de dimension 2 stable par v . Considérons maintenant un sous-espace quelconque H de dimension 2 et stable par v , et supposons qu'il contienne un polynôme P de degré 2. Alors $P' \in H$ et $P'' \in H$. Mais (P, P', P'') est échelonné en degré donc constitue une famille libre, ce qui montre que $\dim H \geq 3$, ce qui est absurde. Ainsi, $H \subset \mathbb{K}_1[X]$, et étant de même dimension, $H = \mathbb{K}_1[X]$. C'est donc bien le seul sous-espace de dimension 2 stable par v .

Q7. $\mathbb{K}_2[X]$ ne peut être égal à la somme directe de trois sous-espaces stables par v et de dimension 1 (puisque'il n'en n'existe qu'un) ni à la somme directe d'un sous-espace stable de dimension 1 et d'un sous-espace stable de dimension 2 puisque $\mathbb{K}_0[X]$ et $\mathbb{K}_1[X]$ ne sont pas en somme directe, donc $v \notin \mathcal{D}$.

Q8. Posons $w = u - v$. On a $\text{Mat}_{\text{can}}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $w \in \mathcal{D}$.

On a aussi $u \in \mathcal{D}$ mais $v = u + w \notin \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

Partie II – Le cas des endomorphismes nilpotents

Le cas $n = 1$

Q9. Si $\dim E = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u : x \mapsto \lambda x$. Or la seule valeur de λ pour laquelle u est nilpotent est $\lambda = 0$, donc $u = 0$.

Le cas $n = 2$

Q10. Supposons la famille $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x)$ liée : il existe $(\lambda_k, \dots, \lambda_2, \lambda_1) \neq (0, \dots, 0, 0)$ tel que $\sum_{j=1}^k \lambda_j u^{j-1}(x) = 0_E$.

Notons j_0 le plus petit entier tel que $\lambda_{j_0} \neq 0$. Alors $\sum_{j=j_0}^k \lambda_j u^{j-1}(x) = 0_E$ et en composant par u^{k-j_0} il reste uniquement $\lambda_{j_0} u^{k-1}(x) = 0_E$, ce qui est absurde puisque $\lambda_{j_0} \neq 0$ et $u^{k-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi, la famille $(u^{k-1}(x), \dots, u(x), x)$ est libre.

Q11. Cette famille libre comporte k éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 donc $k \leq 2$, ce qui prouve que $u^2 = 0$, soit $u \in \mathcal{N}_2$.

Le cas général

Q12. Soit $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. D'après la caractérisation (i) on a $E = \bigoplus_{i=1}^p D_i \oplus \bigoplus_{j=1}^q P_j$ avec $\dim D_i = 1$ et $\dim P_j = 2$, stables par u .

Notons v_i l'induit de u sur D_i et w_j l'induit de u sur P_j . Les endomorphismes v_i et w_j sont nilpotents donc d'après les questions 9 et 11, $v_i = 0$ et $w_j \in \mathcal{N}_2$, ce qui montre que $u \in \mathcal{N}_2$.

Q13. On a $u^2 = u \circ u = 0$ donc $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Ainsi, à l'aide du théorème du rang, $\text{rg } u \leq \dim(\text{Ker } u) = \dim E - \text{rg } u$, soit $r \leq n - r$.

Q14. Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, f_r)$ est libre en considérant les scalaires λ_i et μ_j tels que : $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^r \mu_j f_j = 0_E$.

On compose par u pour obtenir : $\sum_{j=1}^r \mu_j e_j = 0_E$, ce qui permet d'en déduire par liberté de la famille que $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0_E$.

Ainsi, $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i = 0_E$, et toujours par liberté de la famille, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$.

La famille est donc libre, et étant de cardinal n , c'est une base de E .

Q15. Réordonnons la base obtenue de la façon suivante : $\mathcal{B} = (e_{r+1}, \dots, e_{n-r}, e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_r, f_r)$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & J & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J \end{pmatrix}$ avec $n - 2r$ scalaires nuls sur la diagonale, suivis de r blocs J .

Q16. Ceci montre, à l'aide de la caractérisation (ii), que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D}$ et donc que $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{N}$. L'inclusion réciproque a été justifiée à la question 12, d'où l'égalité.

Partie III – Un critère d'appartenance à $\mathcal{D}$

Q17. La linéarité de φ est évidente. Montrons son injectivité : soit $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que $\varphi(A, B) = 0$, autrement dit : $(X - a)^2 A = -(X - b)^2 B$. Puisque $a \neq b$, a est racine double de B . Mais $\deg B \leq 1$ donc nécessairement $B = 0$. Il en résulte que $(X - a)^2 A = 0$, puis $A = 0$.

φ est donc injectif. De plus, $\dim \mathbb{K}_1[X]^2 = 2^2 = 4 = \dim \mathbb{K}_3[X]$, donc φ est un isomorphisme.

Le polynôme $1 \in \mathbb{K}_3[X]$ possède donc un unique antécédent ; autrement dit il existe un unique couple $(A, B) \in \mathbb{K}_1[X]^2$ tel que $(X - a)^2 A + (X - b)^2 B = 1$.

Q18. Soit $x \in \text{Ker}((u - a\text{Id})^2) \cap \text{Ker}((u - b\text{Id})^2)$; montrons que $x = 0_E$.

Première méthode (dans la continuité de la question précédente) :

Appliquée en u , l'égalité précédente donne : $A(u) \circ (u - a\text{Id})^2 + B(u) \circ (u - b\text{Id})^2 = \text{Id}$ donc

$$A(u) \circ (u - a\text{Id})^2(x) + B(u) \circ (u - b\text{Id})^2(x) = x$$

Mais $(u - a\text{Id})^2(x) = (u - b\text{Id})^2(x) = 0_E$ donc $x = 0_E$.

Deuxième méthode (par un calcul direct) :

On a $(u - a\text{Id})^2(x) = (u - b\text{Id})^2(x) = 0_E$, soit :
$$\begin{cases} u^2(x) - 2au(x) + a^2x = 0_E \\ u^2(x) - 2bu(x) + b^2x = 0_E \end{cases}$$

On soustrait ces deux égalités, et sachant que $a \neq b$ on obtient $u(x) = \frac{a+b}{2}x$, et donc $u^2(x) = \frac{a+b}{2}u(x) = \frac{(a+b)^2}{4}x$.

En ré-injectant ces deux égalités dans la première relation on obtient après simplification : $\frac{(a-b)^2}{4}x = 0_E$, et donc $x = 0_E$.

Q19. Raisonnons par récurrence sur p :

– si $p = 1$, la somme $\text{Ker}(u - \alpha_1\text{Id})$ est bien évidemment directe puisque composée d'un seul terme ;

– si $p \geq 2$, supposons la somme $H = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \text{Ker}(u - \alpha_i\text{Id})$ directe, et montrons que $H + \text{Ker}(u - \alpha_p\text{Id})$ est aussi directe.

Soit donc $x \in H \cap \text{Ker}(u - \alpha_p\text{Id})$. Alors $u(x) = \alpha_p x$ et il existe $(x_1, \dots, x_{p-1}) \in \text{Ker}(u - \alpha_1\text{Id}) \times \dots \times \text{Ker}(u - \alpha_{p-1}\text{Id})$ tel que $x = x_1 + \dots + x_{p-1}$.

Ainsi, $u(x) = \alpha_p(x_1 + \dots + x_{p-1})$ et $u(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{p-1} x_{p-1}$. On en déduit que $\sum_{i=1}^{p-1} (\alpha_p - \alpha_i)x_i = 0_E$.

La somme H étant directe et les α_i distincts de α_p , on en déduit que $x_1 = \dots = x_{p-1} = 0_E$, soit $x = 0_E$. La récurrence se propage.

Remarque. On peut aussi invoquer un résultat du cours sur la réduction des endomorphismes qui affirme que les sous-espaces propres sont en somme directe.

Q20. Raisonnons maintenant par récurrence sur q :

– si $q = 0$, on applique la question précédente ;

– si $q \geq 1$, supposons la somme $H = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i\text{Id}) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q-1} \text{Ker}((u - \beta_j\text{Id})^2)$ directe, et considérons un vecteur $x \in H \cap \text{Ker}((u - \beta_p\text{Id})^2)$. Il s'agit de montrer que $x = 0_E$.

$x \in H$ donc on peut écrire $x = \sum_{i=1}^p x_i + \sum_{j=1}^{q-1} y_j$ avec $(u - \alpha_i\text{Id})(x_i) = 0_E$ et $(u - \beta_j\text{Id})^2(y_j) = 0_E$.

On a $u(x_i) = \alpha_i x_i$ et $u^2(x_i) = \alpha_i^2 x_i$ donc $(u - \beta_p\text{Id})^2(x_i) = u^2(x_i) - 2\beta_p u(x_i) + \beta_p^2 x_i = (\alpha_i^2 - 2\alpha_i\beta_p + \beta_p^2)x_i = (\alpha_i - \beta_p)^2 x_i$.

Par ailleurs $(u - \beta_j\text{Id})^2 \circ (u - \beta_p\text{Id})^2(y_j) = (u - \beta_p\text{Id})^2 \circ (u - \beta_j\text{Id})^2(y_j) = (u - \beta_p\text{Id})^2(0_E) = 0_E$ donc $(u - \beta_p\text{Id})^2(y_j) \in \text{Ker}((u - \beta_j\text{Id})^2)$.

On en déduit que $0_E = (u - \beta_p\text{Id})^2(x) = \sum_{i=1}^p \underbrace{(\alpha_i - \beta_p)^2 x_i}_{\in \text{Ker}(u - \alpha_i\text{Id})} + \sum_{j=1}^{q-1} \underbrace{(u - \beta_p\text{Id})^2(y_j)}_{\in \text{Ker}(u - \beta_j\text{Id})^2}$, et la somme H étant par hypothèse

supposée directe, on en déduit que pour tout i et j : $(\alpha_i - \beta_p)^2 x_i = 0_E$ et $(u - \beta_j\text{Id})^2(y_j) = 0_E$.

On a $\alpha_i \neq \beta_p$ donc $x_i = 0_E$ et $y_j \in \text{Ker}((u - \beta_j\text{Id})^2) \cap \text{Ker}((u - \beta_p\text{Id})^2)$ donc $y_j = 0_E$ (question 18).

Tout ceci prouve que $x = 0_E$ et donc que la somme $H \oplus \text{Ker}((u - \beta_p\text{Id})^2)$ est directe : la récurrence se propage.

Q21. Considérons la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{j=1}^q \nu_j R_j = 0$ (*).

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. α_k est racine des polynômes P_i pour $i \neq k$, des Q_j et des R_j donc la relation (*) appliquée en α_k donne $\lambda_k P_k(\alpha_k) = 0$ et donc $\lambda_k = 0$.

Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. β_k est racine des polynômes P_i , des Q_j et des polynômes R_j pour $j \neq k$ donc la relation (*) appliquée en β_k donne $\nu_k R_k(\beta_k) = 0$ et donc $\nu_k = 0$.

À ce stade il nous reste la relation $\sum_{j=1}^q \mu_j Q_j = 0$, qui donne en dérivant $\sum_{j=1}^q \mu_j Q'_j = 0$ (**).

Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. β_k est racine simple des polynômes Q'_j pour $j \neq k$ donc la relation (**) appliquée en β_k donne $\mu_k Q'_k(\beta_k) = 0$ et donc $\mu_k = 0$.

Nous avons prouvé que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Étant de cardinal $p + 2q$ et étant incluse dans $\mathbb{K}_{p+2q-1}[X]$ elle en constitue donc une base.

Q22. Décomposons le polynôme 1 dans la base $\mathcal{B}$: $1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j + \sum_{j=1}^q v_j R_j$ et appliquons cette égalité en u :

$$\text{Id} = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u) + \sum_{j=1}^q v_j R_j(u) \quad \text{donc} \quad \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^p \lambda_i P_i(u)(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j Q_j(u)(x) + \sum_{j=1}^q v_j R_j(u)(x).$$

On a $(u - \alpha_i \text{Id})(P_i(u)(x)) = P(u)(x) = 0_E$ donc $P_i(u)(x) \in \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id})$ et pour des raisons analogues, $Q_j(u)(x) \in \text{Ker}(u - \beta_j \text{Id})$ et $R_j(u)(x) \in \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$. Ainsi, nous avons montré que pour tout $x \in E$, $x \in \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id}) \oplus \bigoplus_{j=1}^q \text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$ et donc que cette somme (directe d'après la question 20) est égale à E tout entier.

Q23. Considérons $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, ainsi qu'une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $\text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id})$. Chaque sous-espace $\text{Vect}(e_k)$ est stable par u (car $u(e_k) = \alpha_i e_k$) et de dimension 1, donc chacun des $\text{Ker}(u - \alpha_i \text{Id})$ peut être décomposé en somme directe de sous-espaces stables par u et de dimension 1.

Soit maintenant $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$. $\text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$ est stable par $u - \beta_j \text{Id}$ donc on peut considérer l'induit, que l'on note w_j . On a $w_j^2 = 0$ donc w_j est nilpotent d'ordre au plus 2. Or d'après la question 16, w_j vérifie la condition (i) : il est donc possible de décomposer $\text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$ en somme directe de sous-espaces stables par w_j et de dimensions 1 ou 2. Et puisque $u = w_j + \beta_j \text{Id}$ sur $\text{Ker}((u - \beta_j \text{Id})^2)$, ces sous-espaces sont aussi stables par u .

Tout ceci montre que la décomposition obtenue à la question précédente peut elle-même être décomposée en somme directe de sous-espaces stables par u et de dimensions 1 ou 2, ce qui permet de conclure : $u \in \mathcal{D}$.