Matrices de distance euclidienne (Mines PC 2024)

Durée : 4 heures

Notations et rappels

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- On note $\langle x \mid y \rangle$ (resp. $X^T Y$) le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ (resp. X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié canoniquement à $\mathbb{R}^n$) et $\|x\|$ la norme de x (resp. $\|X\|$ la norme de X) associée au produit scalaire.
- Étant donnés deux points P et P′ de $\mathbb{R}^n$, on note $d(P, P')$ la distance entre P et P′ associée à la norme euclidienne usuelle :
$$d(P,P') = \left\| \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'} \right\|$$
où O est le point d'origine.
- Un endomorphisme auto-adjoint f de $\mathbb{R}^n$ est dit *positif* si
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x \mid f(x) \rangle \geqslant 0$$
Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geqslant 0$$
- Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Un endomorphisme auto-adjoint f de $\mathbb{R}^n$ est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans $\mathcal{B}$ est positive.
- On appelle *matrice de distance euclidienne* (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée $D = (d_{i,j})$ d'ordre n telle qu'il existe un entier naturel non nul m et des points $A_1, \dots, A_n$ de $\mathbb{R}^m$ tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a :
$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, une MDE de spectre $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On admet sans démonstration dans ce sujet que des endomorphismes auto-adjoints de $\mathbb{R}^n$ sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans $[0, +\infty[$.

Les questions marquées du symbole ⋆ possèdent une indication optionnelle placée en dernière page.

1 – Matrices de Hadamard

On appelle *matrice de Hadamard* d'ordre n toute matrice H carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou −1 et telle que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} H$ soit orthogonale.

1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

⋆ **2** ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne par −1 ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de H est encore une matrice de Hadamard.

3 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre n dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si $n \geqslant 2$ alors n est pair.

4 ▷ Montrer que si H est une matrice de Hadamard d'ordre n supérieur ou égal à 4, alors n est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer la première ligne de H uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de $n/2$ coefficients égaux à 1 puis $n/2$ coefficients égaux à −1.

2 – Quelques résultats sur les endomorphismes auto-adjoints

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de $\mathbb{R}^n$. On note $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres classées par ordre croissant de f. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, on introduit l'ensemble π_k des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

5 ▷ Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f, le vecteur e_i étant associé à λ_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On garde par la suite cette base.

★ **6** ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et S un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension k. On pose $\mathrm{T}_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$.
Justifier que $\mathrm{S} \cap \mathrm{T}_k \neq \{0\}$.

7 ▷ En considérant $x \in \mathrm{S} \cap \mathrm{T}_k \setminus \{0\}$, justifier que :

$$\max_{x \in \mathrm{S}, \|x\|=1} \langle x \mid f(x) \rangle \geqslant \lambda_k$$

8 ▷ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. À l'aide de $\mathrm{S}_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) \in \pi_k$, montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{\mathrm{S} \in \pi_k} \left(\max_{x \in \mathrm{S}, \|x\|=1} \langle x \mid f(x) \rangle \right)$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

★ **9** ▷ Soit M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si M est positive, alors il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{B}$.
En déduire que si M n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive λ d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire u, alors il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{M} = \lambda u u^\mathrm{T} - \mathrm{B}^\mathrm{T}\mathrm{B}$.

3 – Caractérisation des MDE

On note e la matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note Δ_n l'ensemble des MDE d'ordre n et Ω_n l'ensemble des matrices M symétriques positives d'ordre n telles que $\mathrm{Me} = 0$. On note enfin P la matrice d'ordre n définie par :

$$\mathrm{P} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n}\mathrm{e}\mathrm{e}^\mathrm{T}$$

On note T l'application de Δ_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à D associe :

$$\mathrm{T(D)} = -\frac{1}{2}\mathrm{PDP}$$

et K l'application de Ω_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui à une matrice A associe :

$$\mathrm{K(A)} = \mathrm{e}\mathrm{a}^\mathrm{T} + \mathrm{a}\mathrm{e}^\mathrm{T} - 2\mathrm{A}$$

où a est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de A.

10 ▷ Montrer que P est symétrique et que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé est une projection orthogonale sur $\mathrm{Vect(e)}^\perp$.

★ **11** ▷ Soit $\mathrm{D} \in \Delta_n$. Soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des points dont la matrice D est la matrice de distance euclidienne. On note x_i les vecteurs coordonnées des A_i. Soit $\mathrm{M_A}$ la matrice dont les colonnes sont les x_i et C la colonne formée des $\|x_i\|^2$. Écrire D comme combinaison linéaire de Ce^T, eC^T et $\mathrm{M_A^T M_A}$. En déduire que, pour toute matrice D de Δ_n, on a $\mathrm{T(D)} \in \Omega_n$.

★ **12** ▷ Montrer que, pour toute matrice A de Ω_n, on a $\mathrm{K(A)} \in \Delta_n$.

13 ▷ Montrer que les applications $\mathrm{T} : \Delta_n \to \Omega_n$ et $\mathrm{K} : \Omega_n \to \Delta_n$ vérifient :

$$\mathrm{T} \circ \mathrm{K} = \mathrm{Id}_{\Omega_n}$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également $\mathrm{K} \circ \mathrm{T} = \mathrm{Id}_{\Delta_n}$ *et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.*

14 ▷ Montrer qu'une matrice symétrique D d'ordre n à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est une MDE si et seulement si $-\frac{1}{2}\mathrm{PDP}$ est positive.

15 ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre e est une MDE.

4 – Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

16 ▷ Préciser la somme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ des valeurs propres d'une MDE d'ordre n.

17 ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Montrer que pour tout $x \in \text{Vect}(e)^{\perp}$, on a :

$$x^{\mathrm{T}} \mathrm{D} x \leqslant 0$$

★ **18** ▷ Soit D une MDE d'ordre n non nulle. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer que $\lambda_{n-1} \leqslant 0$ et en déduire que D a exactement une valeur propre strictement positive.

5 – Problème inverse pour les MDE

Soit H une matrice de Hadamard d'ordre n et de première ligne constante égale à 1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\lambda_1 > 0 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

On note U la matrice $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{H}$ et Λ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les λ_i. On note enfin $\mathrm{D} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}} \Lambda \mathrm{U}$.

19 ▷ Montrer que D est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, avec λ_1 d'espace propre de dimension 1.

★ **20** ▷ Montrer que D est MDE.

21 ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 telle que son spectre soit $\left(5, -1, -2, -2\right)$.

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair…

FIN DU PROBLÈME

Indications

2 ▷ Une matrice est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales.

6 ▷ Utiliser la formule de Grassmann.

9 ▷ Utiliser le théorème spectral. Et pour la deuxième partie de la question, montrer que $\mathrm{N} = \lambda u u^{\mathrm{T}} - \mathrm{M}$ est positive.

11 ▷ Utiliser la formule $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i \mid x_j\rangle$.

12 ▷ Appliquer la première partie de la question 9 à la matrice A et considérer les points dont les coordonnées sont rangées dans les colonnes de B.

15 ▷ Utiliser la deuxième partie de la question 9.

18 ▷ Utiliser le théorème de Courant-Fischer démontré à la question 8.

20 ▷ Appliquer la question 15