

CORRIGÉ : MATRICES DE DISTANCE EUCLIDIENNE (MINES PC 2024)

1 – Matrices de Hadamard

1 ▷ Les matrices $H_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de Hadamard.

2 ▷ Soit H une matrice de Hadamard, et H_1 la matrice obtenue en multipliant une colonne par -1 . Les colonnes de H_1 restent orthogonales et de norme égale à $\sqrt{n}$, donc H_1 est aussi une matrice de Hadamard.

Soit H_2 la matrice obtenue en échangeant deux colonnes de H . Les colonnes de H_2 restent orthogonales entre elles et de norme égale à $\sqrt{n}$, donc H_2 est aussi une matrice de Hadamard.

Sachant que H^T est aussi une matrice de Hadamard, il en est de même si on réalise ces opérations sur les lignes.

3 ▷ Soit H une matrice de Hadamard. Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $H_{1,j} = -1$, multiplions la j^{e} colonne par -1 . On obtient une matrice H' dont la première ligne n'est constituée que de 1, et cette matrice est de Hadamard d'après la question précédente.

Si $n \geq 2$, toutes les autres lignes de H' doivent être orthogonales à la première, et doivent donc comporter autant de 1 que de -1 , ce qui impose à n d'être pair.

4 ▷ Soit H une matrice de Hadamard d'ordre $n \geq 4$, et H' la matrice de Hadamard construite à la question précédente : sa première ligne ne comporte que des 1, et la seconde autant de 1 que de -1 . Permutons les colonnes de H' de sorte de placer les $n/2$ coefficients de la seconde ligne égaux à 1 en premier. D'après la question 2 on obtient une matrice H'' qui est toujours de Hadamard.

Considérons alors la troisième ligne de H'' , et notons $h_1, \dots, h_n$ les coefficients qui s'y trouvent.

Cette ligne doit être orthogonale aux deux précédentes, donc $\sum_{i=1}^n h_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{n/2} h_i - \sum_{i=n/2+1}^n h_i = 0$, ce qui impose $\sum_{i=1}^{n/2} h_i = 0$.

L'entier $n/2$ doit donc être pair, ce qui impose à n d'être un multiple de 4.

2 – Quelques résultats sur les endomorphismes auto-adjoints

5 ▷ D'après le théorème spectral, f est ortho-diagonalisable : il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ formée de vecteurs propres de f : $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

6 ▷ D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(S \cap T_k) = \dim S + \dim T_k - \dim(T_k + S) = k + (n+1-k) - \dim(T_k + S) = n+1 - \dim(T_k + S).$$

Or $\dim(T_k + S) \leq n$, donc $\dim(S \cap T_k) \geq 1$ et ainsi $S \cap T_k \neq \{0\}$.

7 ▷ Soit donc $x \in S \cap T_k \setminus \{0\}$. Quitte à remplacer x par $\frac{x}{\|x\|}$, on peut supposer $\|x\| = 1$.

Puisque $x \in T_k$, posons $x = \sum_{i=k}^n x_i e_i$. Alors $f(x) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i e_i$ et $\langle x | f(x) \rangle = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k$, donc $\max_{x \in S \cap T_k, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \geq \lambda_k$. A fortiori, $\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \geq \lambda_k$.

8 ▷ La question précédente montre que pour tout $S \in \pi_k$, $\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \geq \lambda_k$ et donc $\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \right) \geq \lambda_k$.

Considérons maintenant le sous-espace vectoriel $S_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, et $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \in S_k$ un vecteur de norme 1.

On a $\langle x | f(x) \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k$ donc $\max_{x \in S_k, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \leq \lambda_k$, ce qui prouve que $\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \right) \leq \lambda_k$.

D'où finalement l'égalité : $\min_{S \in \pi_k} \left(\max_{x \in S, \|x\|=1} \langle x | f(x) \rangle \right) = \lambda_k$.

9 ▷ Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $M = PDP^T$. Posons $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $M = (P\Delta)(\Delta P^T) = B^T B$ avec $B = \Delta P^T$.

Soit maintenant $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ne possédant qu'une seule valeur propre strictement positive λ , de multiplicité égale à 1, et u un vecteur propre unitaire associé à λ .

Posons $N = \lambda uu^T - M$, et complétons (u) pour former une base orthonormée $(u = e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de M . On notera $f(e_i) = \lambda_i \leq 0$ pour $i \geq 2$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, posons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors $Nx = \lambda \langle u | x \rangle u - Mx = \lambda x_1 u - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i = - \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i e_i$ et $x^T Nx = - \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0$

donc $N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et d'après le point précédent, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $N = B^T B$.

3 – Caractérisation des MDE

10 ▷ On a $P^T = I_n - \frac{1}{n}(ee^T)^T = I_n - \frac{1}{n}ee^T = P$ donc P est symétrique.

On a $Pe = e - \frac{\|e\|^2}{n}e = e - e = 0$ et si $u \in \{e\}^\perp$, $Pu = u - \frac{\langle e | u \rangle}{n}e = u$ donc P est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e)^\perp$.

11 ▷ On a $D = (\|x_i - x_j\|^2)_{1 \leq i, j \leq n}$, $Ce^T = (\|x_i\|^2)_{1 \leq i, j \leq n}$, $eC^T = (\|x_j\|^2)_{1 \leq i, j \leq n}$ et $M_A^T M_A = (\langle x_i | x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

De l'égalité $\|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i | x_j \rangle$ on tire alors : $D = Ce^T + eC^T - 2M_A^T M_A$.

P est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e)^\perp$ donc $Pe = 0$ et (en transposant) $e^T P = 0$. On en déduit déjà que $T(Ce^T) = T(eC^T) = 0$.

Ainsi, $T(D) = PM_A^T M_A P = (M_A P)^T (M_A P)$, ce qui montre que $T(D) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Ses valeurs propres sont positives puisque $T(D)x = \lambda x \implies \lambda \|x\|^2 = \|M_A P x\|^2$, et $T(D)e = 0$ (puisque $Pe = 0$). Ainsi, $T(D) \in \Omega_n$.

12 ▷ D'après la question 9, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^T B$. Pour $1 \leq j \leq n$, on note b_j la j^{e} colonne de la matrice B .

Les coefficients diagonaux de A sont alors les $\sum_{i=1}^n b_{ij}^2 = \|b_j\|^2$.

Notons $B_1, \dots, B_n$ les points dont les coordonnées respectives dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont les $b_1, \dots, b_n$. Alors d'après la question précédente, $K(A)$ est la matrice des distances euclidiennes de ces points, et ainsi $K(A) \in \Delta_n$.

13 ▷ On reprend les notations de la question précédente.

Soit $A \in \Omega_n$. La question 12 a montré que $K(A)$ est la matrice des distances des points $B_1, \dots, B_n$. D'après La question 11, $T \circ K(A) = (M_B P)^T (M_B P) = (BP)^T (BP)$, car ici $M_B = B$. Ainsi, $T \circ K(A) = PB^T BP = PAP$.

Or $A \in \Omega_n$ donc $Ae = 0$, et puisque A est symétrique et que P est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e)^\perp$, $AP = A$ et $PA = A$, donc $T \circ K(A) = A$.

14 ▷ Si D est une MDE, la question 11 a montré que $T(D) = -\frac{1}{2}PDP$ appartient à Ω_n , donc est positive.

Réciproquement, supposons que $A = -\frac{1}{2}PDP$ soit positive. Puisque D est symétrique il en est de même de A , et puisque $Pe = 0$ on a $A \in \Omega_n$. Mais $A = T(D)$ donc $D = K(A) \in \Delta_n$, autrement dit D est une MDE.

15 ▷ Soit M une matrice symétrique à coefficients positifs, de diagonale nulle et ayant une unique valeur propre λ strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre e .

D'après la question 9, en posant $u = \frac{1}{\sqrt{n}}e$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = \lambda uu^T - B^T B = \frac{\lambda}{n}ee^T - B^T B$.

Sachant que $Pe = 0$ on a $-\frac{1}{2}PMP = \frac{1}{2}PB^T BP = \frac{1}{2}(BP)^T (BP)$, et cette dernière est positive puisque pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T (BP)^T (BP) X = \|BPX\|^2 \geq 0$ donc d'après la question précédente, M est une MDE.

4 – Spectre des MDE

16 ▷ Soit D une MDE. Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable ; la somme de ses valeurs propres est donc égale à sa trace, et puisque sa diagonale est nulle, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

17 ▷ D'après la question 14, la matrice $-\frac{1}{2}\text{PDP}$ est positive donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x^T \text{PDP} x \leq 0$. Mais lorsque $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ on a $Px = x$ et donc en transposant $x^T P = x^T$, ce qui donne $x^T D x \leq 0$.

18 ▷ Posons $S = \text{Vect}(e)^\perp$. On a $\dim S = n - 1$ donc d'après le théorème de Courant-Fischer, $\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in S, \|x\|=1} x^T D x$, et la question précédente implique alors que $\lambda_{n-1} \leq 0$.

Les valeurs propres étant ordonnées par ordre croissant, on en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \leq 0$. D'après la question 16 on en déduit que $\lambda_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \geq 0$.

De plus, si on avait $\lambda_n = 0$, on aurait aussi $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = 0$ et s'agissant d'une somme de termes négatifs, ceci impliquerait $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$. Mais alors on aurait $D = 0$, ce qui n'est pas. On a donc $\lambda_n > 0$.

Problème inverse pour les MDE

19 ▷ La matrice Λ est symétrique (car diagonale) donc D est symétrique. La matrice U est orthogonale donc D et Λ sont semblables : elles ont mêmes valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres sont identiques (donc λ_1 est valeur propre simple de D). Il reste à justifier que les coefficients de D sont positifs et que sa diagonale est nulle. Le coefficient de rang (i, j) de D vaut :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k U_{k,i} U_{k,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k H_{k,i} H_{k,j} = \frac{\lambda_1}{n} H_{1,i} H_{1,j} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \lambda_k H_{k,i} H_{k,j}$$

Par hypothèse on a $H_{1,i} = H_{1,j} = 1$ et $H_{k,i} H_{k,j} \in \{-1, 1\}$ donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k U_{k,i} U_{k,j} \geq \lambda_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k = 0$. Les coefficients sont bien positifs.

Enfin, pour $i = j$ on a $\sum_{k=1}^n \lambda_k U_{k,i}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k = 0$. la diagonale est bien nulle.

20 ▷ Pour appliquer la question 15, il reste à vérifier que e est vecteur propre pour la valeur propre λ_1 . Pour ce faire on observe que la première ligne de H est égale à e^T . Comme toutes les lignes de H sont orthogonales entre elles, on a donc

$$He = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ puis } \Lambda He = \lambda_1 \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et enfin } H^T \Lambda He = \lambda_1 ne. \text{ Ainsi, } De = \lambda_1 e \text{ et d'après la question 15, } D \text{ est une MDE.}$$

$$21 \triangleright \text{ Posons } H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \frac{1}{2}H, \Lambda = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ et } D = U^T \Lambda U. \text{ D'après les questions précédentes,}$$

D est une MDE de spectre $(5, -1, -2, -2)$.

$$\text{La calcul donne } D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$