

CORRIGÉ : ÉTUDE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES (ÉCRIN P 1995)

Partie I.

Question 1. Si P est un polynôme constant on a $\Delta(P) = 0$ donc $\deg \Delta(P) = -\infty$.

Si P n'est pas constant, posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$.

$$P(X+1) = \sum_{i=0}^n a_i (X+1)^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i a_i \binom{i}{k} X^k = \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n a_i \binom{i}{k} X^k \text{ donc } P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k \text{ avec } b_k = \sum_{i=k}^n a_i \binom{i}{k} - a_k.$$

On observe alors que $b_n = 0$ et $b_{n-1} = na_n \neq 0$ donc $\Delta(P)$ est de degré $n-1 = \deg P - 1$.

Question 2. La question précédente montre que $\deg P \geq 1 \implies \Delta(P) \neq 0$ donc $\text{Ker } \Delta = E_0$.

Question 3. λ est valeur propre si et seulement s'il existe $P \neq 0$ tel que $\Delta(P) = \lambda P$. Si $\lambda \neq 0$ ceci implique que $\deg \Delta(P) = \deg P$, ce qui n'est possible que si $P = 0$ d'après la question 1. On en déduit que 0 est la seule valeur propre de Δ , son sous-espace propre étant $\text{Ker } \Delta = E_0$.

Question 4.

a) On a $E_n = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ donc $\Delta(E_n) = \text{Vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$ (puisque $\Delta(1) = 0$). D'après la question 1 la famille $(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$ est échelonnée en degré et engendre E_{n-1} , donc $\Delta(E_n) = E_{n-1}$.

b) Soit $Q \in E_{n-1}$. D'après ce qui précède il existe $P_0 \in E_n$ tel que $\Delta(P_0) = Q$. Pour tout $P \in E$ on a $\Delta(P) = Q \iff \Delta(P) = \Delta(P_0) \iff \Delta(P - P_0) = 0 \iff P - P_0 \in \text{Ker } \Delta = E_0$, donc l'ensemble des polynômes P vérifiant $\Delta(P) = Q$ est l'ensemble $\{P_0 + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Il reste à observer que parmi ces polynômes seul le polynôme $P = P_0 - P_0(0)$ vérifie la condition $P(0) = 0$ pour conclure.

Question 5. D'après ce qui précède on peut chercher A sous la forme $A = aX^3 + bX^2 + cX$. On calcule $A(X+1) - A(X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + (a+b+c)$ donc $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$.

$$\text{Par télescope } S(n) = A(n+1) - A(0) = A(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Partie II.

Question 6. Pour tout $x > 0$, $T(f_n)(x) = \cos(2\pi n(x+1)) - \cos(2\pi nx) = 0$ car $2\pi n \equiv 0 \pmod{2\pi}$ donc $f_n \in \text{Ker } T$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

– Si $n = 0$, la famille (f_0) est libre car f_0 n'est pas la fonction nulle.

– Si $n \geq 1$, supposons la famille $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ libre, et raisonnons par l'absurde en supposant la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ liée :

il existerait alors des scalaires non tous nuls (car f_n n'est pas la fonction nulle) $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f_k$.

En dérivant deux fois on obtient $(2\pi n)^2 f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (2\pi k)^2 f_k$ donc $0 = \sum_{k=0}^{n-1} 4\pi^2 (n^2 - k^2) \lambda_k f_k = 0$, ce qui contredit la liberté

de cette famille. La récurrence se propage.

Ainsi, si $\text{Ker } T$ était de dimension finie n , une famille libre ne pourrait comporter plus de n éléments, en conséquence de quoi la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ serait liée. $\text{Ker } T$ est donc de dimension infinie.

Question 7. Procédons par analyse/synthèse.

Si une telle fonction f existe, alors pour tout $x > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(x+k+1) - f(x+k) = g(x+k)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

pour tout $x \in]0, 1]$, $f(n+x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} g(x+k)$. On en déduit que f est nécessairement définie sur tout intervalle de type

$]n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$) par la relation $f(x) = \phi(x-n) + \sum_{k=0}^{n-1} g(x-n+k)$.

Réciproquement, considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

- pour tout $x \in]0, 1]$, $f(x) = \phi(x)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]n, n+1]$, $f(x) = \phi(x-n) + \sum_{k=0}^{n-1} g(x-n+k)$.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]n, n+1]$ on a $x+1 \in]n+1, n+2]$ donc

$$f(x+1) = \phi((x+1)-(n+1)) + \sum_{k=0}^n g((x+1)-(n+1)+k) = \phi(x-n) + \sum_{k=0}^n g(x-n+k) = f(x) + g(x)$$

soit $T(f) = g$.

Cette question met en évidence un antécédent de g par T pour tout $g \in F$, donc T est surjective.

Question 8. $f \in F(\lambda) \iff \forall x > 0, f(x+1) = (\lambda+1)f(x)$. Nécessairement f est alors défini sur tout intervalle $]n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$) par la relation $f(x) = f(x-n)(\lambda+1)^n$. En imposant en plus à f d'être constante égale à 1 sur $]0, 1]$ on obtient $f(x) = (\lambda+1)^n$.

La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par les relations précédentes est non nulle et vecteur propre de T pour la valeur propre λ , donc tout réel est valeur propre de T .

Partie III.

Question 9.

a) $T(\delta) = T(\phi) - T(\psi) = 0$ donc pour tout $x > 0$, $\delta(x+1) = \delta(x)$. On en déduit par récurrence que pour tout $x \in]0, 1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\delta(x) = \delta(x+n)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\delta(n) = \delta(1) = \phi(1) - \psi(1) = a - a = 0$.

b) Soit $x \in]0, 1]$. On a $\delta(x+n) = \phi(x+n) - \psi(x+n) \leq \phi(n+1) - \psi(n)$ car ϕ et ψ sont croissantes. De plus, $\phi(n+1) - \psi(n) = T(\phi)(n) + \phi(n) - \psi(n) = \frac{1}{n} + \delta(n) = \frac{1}{n}$, donc $\delta(x) \leq \frac{1}{n}$.

De même, $\delta(x+n) \geq \phi(n) - \psi(n+1) = \delta(n) - T(\psi)(n) = -\frac{1}{n}$ donc $-\frac{1}{n} \leq \delta(x) \leq \frac{1}{n}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit que pour tout $x \in]0, 1]$, $\delta(x) = 0$, puis, à l'aide de la relation $\delta(x+n) = \delta(x)$ on étend ce résultat par récurrence à tout intervalle $]n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}$), donc à $]0, +\infty[$. Ceci prouve que $\phi = \psi$.

Question 10. Pour tout $x \in]0, 1]$, $\frac{1}{x} = f_a(x+1) - f_a(x) \leq f_a(2) - f_a(x)$ donc $f_a(x) \leq f_a(2) - \frac{1}{x}$. En faisant tendre x vers 0 on obtient que $\lim_{x \rightarrow 0} f_a(x) = -\infty$.

Par télescopage on établit que $f_a(n) = f_a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n}$ est positive et divergente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(n) = +\infty$.

La fonction f_a étant croissante, on a pour tout $x > 0$, $f_a(x) \geq f_a(\lfloor x \rfloor)$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$.

Question 11.

a) On fixe $x > 0$. $u_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

b) On calcule $T(f_a)(x) = f_a(x+1) - f_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right)$.

Par télescopage, $\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1+x} \right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{N+1+x}$ donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $T(f_a)(x) = \frac{1}{x}$.

On a $f_a(1) = a - 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ et là encore par télescopage $f_a(1) = a$.

Enfin, f_a est une somme de fonctions croissantes donc est croissante. Il s'agit donc d'une fonction de F vérifiant les conditions $C_1(a)$, son unicité étant assurée par la question 9.

Question 12. Soit $\alpha > 0$. Sur l'intervalle $]0, \alpha]$ la fonction u_n est positive et croissante donc $\|u_n\|_\infty = u_n(\alpha) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La convergence de $\sum u_n$ est normale donc uniforme sur $]0, \alpha]$. Les fonctions u_n étant continues sur $]0, \alpha]$, la fonction f_a est elle-même continue sur cet intervalle, puis par recouvrement sur $]0, +\infty[$.

Question 13. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $u'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$. Sur cet intervalle on a $\|u'_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc la convergence de $\sum u'_n$ est normale et par suite uniforme sur $]0, +\infty[$. On en déduit que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $f'_a(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

Partie IV.

Question 14. On a pour tout $x > 0$ $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$ et g est dérivable donc $g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$, soit $T(g')(x) = \frac{1}{x}$. En posant $a = g'(1)$ on en déduit que g' vérifie $\mathcal{C}_1(a)$.

Question 15. La condition $g(1) = 0$ montre que si g vérifie $\mathcal{C}_2$ alors pour tout $x > 0$, $g(x) = \int_1^x f_a(t) dt = a(x-1) + \int_1^x f_0(t) dt$, et alors $a = g(2) - \int_1^2 f_0(t) dt$. Mais $g(2) - g(1) = \ln(1)$ donc $g(2) = 0$, et ainsi $a = - \int_1^2 f_0(t) dt$.

Réciproquement, considérons la fonction $g : x \mapsto a(x-1) + \int_1^x f_0(t) dt$, et montrons qu'elle vérifie $\mathcal{C}_2$:

- $g(x+1) - g(x) = a + \int_1^{x+1} f_0(t) dt - \int_1^x f_0(t) dt = \int_2^{x+1} f_0(t) dt - \int_1^x f_0(t) dt = \int_1^x f_0(t+1) dt - \int_1^x f_0(t) dt = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$.
- $g(1) = 0$.
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ car f_0 est continue, et $g' = a + f_0 = f_a$ est croissante.

Nous avons bien par analyse/synthèse prouvé que cette fonction g est bien la seule qui vérifie $\mathcal{C}_2$.

Question 16. La question 11 a prouvé la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $]0, 2]$ donc en particulier sur $[1, 2]$. Le théorème d'intégration nous permet d'intégrer terme à terme sur $[1, 2]$ pour obtenir :

$$a = \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t} \right) dt = \ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+2) + \ln(n+1) \right).$$

Ainsi on a $a = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln 2 + \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N+1} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right) + \ln \left(\frac{N+2}{N+1} \right) \right)$

ce qui donne bien $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right)$ en passant à la limite.

Question 17. Fixons $x > 0$. De la même façon la convergence de $\sum u_n$ est uniforme sur $[1, x]$, ce qui nous permet d'intégrer terme à terme sur $[1, x]$:

$$g(x) = a(x-1) - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_1^x u_n(t) dt = a(x-1) - \ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{n} - \ln(n+x) + \ln(n+1) \right)$$

et compte tenu de la valeur de a obtenue à la question précédente on obtient finalement :

$$g(x) = -\ln x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{n+x}{n} \right) \right).$$

Partie V.

Question 18. Si une fonction h vérifie les conditions $\mathcal{C}_3$ alors, en posant $g = \ln h$ on a :

- $\forall x > 0, g(x+1) = g(x) = \ln x$;
- $g(1) = 0$;
- g est dérivable et $g' = \frac{h'}{h}$ est croissante

donc g vérifie $\mathcal{C}_2$. Ainsi, la seule fonction h qui puisse vérifier $\mathcal{C}_3$ est définie par : $\forall x > 0, h(x) = e^{g(x)}$.

Réciproquement, il est très simple de vérifier qu'une fonction définie ainsi vérifie bien $\mathcal{C}_3$.

En particulier on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(n+1) = nh(n)$ et $h(1) = 1$, ce qui permet d'établir sans peine par récurrence que $h(n) = (n-1)!$.

Question 19. Fixons $x > 0$. On a $\ln(v_n(x)) = x \ln(n+1) + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = -\ln x + x \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)$.

Par télescopage on a $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ donc $\ln(v_n(x)) = -\ln x + \sum_{k=1}^n \left(x \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right)$ et en passant à la limite on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(v_n(x)) = g(x)$ d'après la question 17.

Par continuité de la fonction exponentielle on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = e^{g(x)} = h(x)$.

Question 20.

a) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $0 \leq \sin t \leq 1$ donc $0 \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$. Par positivité de l'intégrale on en déduit que $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$: la suite (I_n) est positive et décroissante.

En particulier, $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$, soit encore $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$.

Réalisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)(\sin t)^{n-1} dt = \left[-(\cos t)(\sin t)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (\sin t)^{n-2} dt \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin t)^2)(\sin t)^{n-2} dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. En particulier, $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$ donc $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

b) Les relations $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$ et $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$ permettent de prouver par récurrence que

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

c) $v_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{n+1}n!}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)} = \frac{2^{n+1}\sqrt{n+1}n!}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)} = \frac{2\sqrt{n+1}(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ et $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi} \frac{(2n+1)(2^n n!)^4}{(2n+1)!^2}$ donc

$$v_n\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}.$$

En passant à la limite on obtient $h\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ et, h étant positive, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Remarque. Ce n'est pas démontré dans ce problème, mais il se trouve que cette fonction h n'est autre que la fonction Γ d'Euler, définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, et dont nous reparlerons lors du chapitre consacré aux intégrales à paramètre. Ce problème démontre en particulier la relation non triviale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.