# Autour de la fonction zêta (Centrale PC 2018)

Durée : 4 heures

***Objectifs et notations***

Le fil conducteur du problème est l'étude de certaines questions liées à la fonction zêta, notée $\zeta$, définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

- Dans la partie I, on introduit la fonction $\zeta$ et on étudie son allure (variations, limites, courbe représentative).
- La partie II étudie une fonction $f$ définie comme la somme d'une série de fonctions. Le développement en série entière de la fonction $f$ fait intervenir la fonction $\zeta$.
- La partie III utilise la fonction $\zeta$ pour construire une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et montrer des résultats liant les probabilités et l'arithmétique.

## I Fonction zêta

On note $\zeta$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On note $\mathcal{D}_\zeta$ son ensemble de définition.

**Q 1.** Déterminer $\mathcal{D}_\zeta$.

**Q 2.** Montrer que $\zeta$ est continue sur $\mathcal{D}_\zeta$.

**Q 3.** Étudier le sens de variations de $\zeta$.

**Q 4.** Justifier que $\zeta$ admet une limite en $+\infty$.

**Q 5.** Soit $x \in \mathcal{D}_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$.

**Q 6.** En déduire, que pour tout $x \in \mathcal{D}_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

**Q 7.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

**Q 8.** Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**Q 9.** Donner l'allure de la courbe représentative de $\zeta$.

## II Étude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, $f$ désigne la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right)$. On note $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de $f$.

### *II.A – Ensemble de définition et variations*

**Q 10.** Déterminer $\mathcal{D}_f$.

**Q 11.** Montrer que $f$ est continue sur $\mathcal{D}_f$ et étudier ses variations.

### *II.B – Équivalents*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

**Q 12.** Calculer $f(k)$.

**Q 13.** En déduire un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**Q 14.** Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, vérifier que $x + k \in \mathcal{D}_f$, puis calculer $f(x+k) - f(x)$.

**Q 15.** En déduire un équivalent de $f$ en $-k$. Quelles sont les limites à droite et à gauche de $f$ en $-k$ ?

### *II. C – Série entière*

On considère la série entière de la variable réelle $x$ donnée par $\sum_{k\in\mathbb{N}^*}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

**Q 16.** Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière. Y a-t-il convergence en $x=\pm\mathrm{R}$ ?

**Q 17.** Montrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f^{(k)}(x)$ pour tout $x\in\mathcal{D}_f$ et tout $k\in\mathbb{N}^*$.

**Q 18.** Montrer qu'il existe $\mathrm{A}\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]-1,1[,\quad \left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant k!\left(\mathrm{A}+\frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right).$$

**Q 19.** En déduire que $f$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k.$$

# III Probabilités

### *Rappels d'arithmétique*

On rappelle ici quelques propriétés élémentaires d'arithmétique.

- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$, on dit que $a$ divise $b$ s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $b=ka$. On dit aussi que $a$ est un diviseur de $b$, ou encore que $b$ est multiple de $a$.
  Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, on note $a\mathbb{N}^*$ l'ensemble des multiples de $a$ dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi $a$ divise $b$ si et seulement si $b\in a\mathbb{N}^*$.
- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$, le plus grand commun diviseur (PGCD) de $a$ et $b$ est l'entier naturel noté $a\wedge b$ tel que

$$a\wedge b=\max\left\{n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b\right\}$$

- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$n \text{ divise } a\wedge b \iff n \text{ divise } a \text{ et } n \text{ divise } b.$$

- On dit qu'un entier naturel $p$ supérieur ou égal à 2 est un nombre premier si ses seuls diviseurs sont 1 et $p$.
  Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On rappelle que $\mathcal{P}$ est infini.
  On note $p_1<p_2<p_3<\cdots<p_n<p_{n+1}<\cdots$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant. Ainsi, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, etc.
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, si $q_1,\dots,q_n$ sont des nombres premiers distincts, alors pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, on a l'équivalence

$$\left(\forall i\in[\![1,n]\!],\quad q_i \text{ divise } a\right)\iff\prod_{i=1}^n q_i \text{ divise } a.$$

- Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$ tel que $a\geqslant 2$, il existe $p\in\mathcal{P}$ tel que $p$ divise $a$.

### *III. A – Loi zêta*

**Q 20.** Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x>1$. Montrer qu'on définit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ en posant

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)=\frac{1}{\zeta(x)n^x}.$$

On dira qu'une telle variable aléatoire X suit la loi de probabilité zêta de paramètre $x$.

Dans les questions suivantes de cette sous-partie III.A, on suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x>1$.

**Q 21.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ pour que X admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de $\zeta$.

**Q 22.** Plus généralement, pour tout $k\in\mathbb{N}$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ pour que $\mathrm{X}^k$ admette une espérance finie. Exprimer alors cette espérance à l'aide de $\zeta$.

**Q 23.** En déduire la variance de X.

**Q 24.** Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \dfrac{1}{a^x}$.

### *III. B – Mutuelle indépendance*

Soit $x$ un réel tel que $x > 1$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi zêta de paramètre $x$. Soit enfin $(q_1, \dots, q_n) \in \mathcal{P}^n$, un $n$-uplet de nombres premiers distincts.

**Q 25.** Montrer que les événements $[X \in q_1\mathbb{N}^*], \dots, [X \in q_n\mathbb{N}^*]$ sont mutuellement indépendants.
Cela entraine, et on ne demande pas de le démontrer, que leurs complémentaires sont mutuellement indépendants.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n$ l'événement $B_n = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \left[X \notin p_k\mathbb{N}^*\right]$.

**Q 26.** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1)$. En déduire que

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \quad \frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right).$$

### *III. C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta*

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de probabilité zêta de paramètre $x$. Soit A l'événement « Aucun nombre premier ne divise X et Y simultanément ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n$ l'événement

$$C_n = \bigcap_{k=1}^{n} \Big([X \notin p_k\mathbb{N}^*] \cup [Y \notin p_k\mathbb{N}^*]\Big).$$

**Q 27.** Exprimer l'événement A à l'aide des événements $C_n$. En déduire que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{\zeta(2x)}.$$

### *III. D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme*

Soient $U_n$ et $V_n$ deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $W_n = U_n \wedge V_n$.

**Q 28.** Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2.$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\big(\mathbb{P}(W_n = k)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell_k$.

**Q 29.** Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ m \geqslant M \implies 1 - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1.$$

**Q 30.** En déduire que $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

On note W une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ qui suit cette loi de probabilité. En adaptant la méthode de la question 29, on peut établir que, pour toute partie B de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(W_n \in B)$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

Enfin, on admet le résultat suivant : si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = P(Y \in a\mathbb{N}^*)$, alors X et Y ont la même loi de probabilité.

**Q 31.** Préciser la loi de W. En considérant $\ell_1$, que peut-on alors en conclure ?

♦ ♦
♦