# Corrigé : autour de la fonction zêta (Centrale PC 2018)

## I Fonction zêta

**Q 1.** Les séries de Riemann sont des intégrales de référence, donc $\mathcal{D}_\zeta = ]1,+\infty[$.

**Q 2.** Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$. Soit $a > 1$. Sur l'intervalle $[a,+\infty[$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^a}$ et $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc la convergence de $\sum f_n$ est normale donc uniforme sur $[a,+\infty[$. Les fonctions $f_n$ étant continues sur $[a,+\infty[$, il en est de même de la fonction $\zeta$, puis par recouvrement sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Q 3.** On a $a < b \Longrightarrow f_n(b) \leqslant f_n(a)$ puis en sommant : $\zeta(b) \leqslant \zeta(a)$. La fonction $\zeta$ est décroissante.

**Q 4.** La fonction $\zeta$ est décroissante et minorée par 0 donc possède une limite en $+\infty$.

**Q 5.** La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante donc par comparaison à une intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}$.

**Q 6.** On en déduit en sommant :

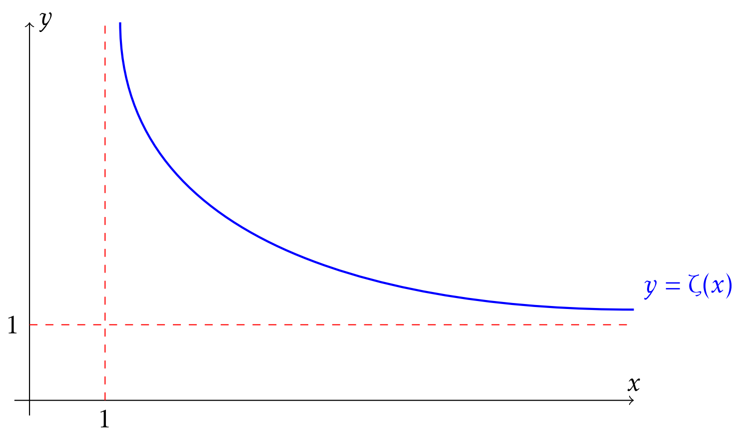
$$1 + \int_2^{N+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{dt}{t^x} \qquad \text{soit} \qquad 1 + \frac{1}{x-1}\Big(\frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{(N+1)^{x-1}}\Big) \leqslant \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}\Big(1 - \frac{1}{N^{x-1}}\Big)$$

puis en faisant tendre N vers $+\infty$ : $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$.

**Q 7.** En faisant tendre $x$ vers $1^+$ on en déduit : $\lim_{1^+} \zeta(x) = +\infty$.

**Q 8.** En faisant tendre $x$ vers $+\infty$ on en déduit : $\lim_{+\infty} \zeta(x) = 1$.

**Q 9.** D'où l'allure générale :




## II Étude d'une fonction définie par une somme

### *II.A – Ensemble de définition et variations*

**Q 10.** Pour que l'expression ait un sens il faut que $x \notin -\mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} = \frac{-x}{n(n+x)} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série en question converge absolument. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$.

**Q 11.** Posons $f_n : x \mapsto \frac{-x}{n(n+x)}$. Sur un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ on a pour tout $n \geqslant -a$, $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n(n+a)} = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum f_n$ converge normalement, et donc uniformément sur $[a,b]$. Les fonctions $f_n$ étant continues, $f$ est continue sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathcal{D}_f$ puis sur $\mathcal{D}_f$ par recouvrement.

Enfin, chaque fonction $f_n$ étant décroissante sur son ensemble de définition, $f$ est décroissante sur chacun des intervalles qui composent $\mathcal{D}_f$, à savoir les intervalles $]-n-1,-n[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ ainsi que sur $]-1,+\infty[$.

### *II. B – Équivalents*

**Q 12.** Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. On a $f(k) - f(k+1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right)$.

Par télescopage, $f(k) - f(k+1) = \dfrac{1}{k+1} - \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{k+1}$ et sachant que $f(0) = 0$ on en déduit, là encore par télescopage, que $f(k) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n}$.

**Q 13.** Nous savons que $f(k) \sim -\ln k$. Pour tout $x > 0$, posons $k_x = \lfloor x \rfloor$. Puisque $f$ est décroissante, $f(k_x+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k_x)$. Puisque $\ln(k+1) \sim \ln(k)$ on a déjà $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(k_x)$. De plus, $\ln(x-1) \leqslant \ln k_x \leqslant \ln x$ et $\ln(x-1) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ donc $\ln k_x \underset{+\infty}{\sim} \ln x$ et en définitive $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln x$.

**Q 14.** $x \in \mathcal{D}_f \iff -x \notin \mathbb{N}^* \implies -x-k \notin \mathbb{N}^*$ donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $x+k \in \mathcal{D}_f$.

On calcule $f(x+k) - f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n+x}\right) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n+x+k} - \frac{1}{n+x}\right)$.

Par télescopage, $f(x+k) - f(x) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{1}{n+x} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x}\right)$.

La première somme est une somme finie de $k$ termes qui tendent vers 0 donc $f(x+k) - f(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n+x}$.

**Q 15.** Posons $x = -k + y$. Alors $f(x) = f(y) + \displaystyle\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n-k+y} = f(y) + \frac{1}{y} - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n-y}$.

$f$ est continue en 0 et $f(0) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{y\to0}\left(f(y) - \sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n-y}\right) = -\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{n}$. On en déduit que $f(x) \underset{-k}{\sim} \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x+k}$.

En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to-k^-} f(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-k^+} f(x) = +\infty$.

### *II. C – Série entière*

**Q 16.** Nous avons vu à la question 8 que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left|(-1)^k\zeta(k+1)\right| = 1$ donc cette série entière a même rayon de convergence que la série $\sum x^k$, à savoir $R = 1$. Pour $x = \pm1$ le terme général de la série ne tend pas vers 0 donc il y a divergence en $\pm1$.

**Q 17.** Avec les notations de la question 11, les fonction $f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$.

Sur un segment $[a,b]$ inclus dans $\mathcal{D}_f$, on a pour $n > -a$ : $\|f_n\|_\infty = \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ donc pour tout $k \geqslant 1$, la convergence de $\sum f_n^{(k)}$ est normale donc uniforme sur $[a,b]$. On en déduit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur tout segment inclus dans $\mathcal{D}_f$, donc sur $\mathcal{D}_f$, et que $f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k k!}{(n+x)^{k+1}}$.

**Q 18.** $|f^{(k)}(x)| = k!\left(\dfrac{1}{(x+1)^{k+1}} + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^{k+1}}\right)$ et en posant $A = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)^2} = \zeta(2)$ on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in ]-1,1[, \qquad |f^{(k)}(x)| \leqslant k!\left(A + \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right).$$

**Q 19.** D'après la question 17, $f^{(k)}(0) = (-1)^k k!\zeta(k+1)$ et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange : pour tout $x \in ]-1,1[$,

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\zeta(k+1)x^k\right| \leqslant \frac{|x|^N}{N!}\sup_{y\in[0,x]}\left|f^{(N)}(y)\right| \leqslant |x|^N \sup_{y\in[0,x]}\left(A + \frac{1}{(y+1)^{N+1}}\right) = \begin{cases}(A+1)x^N & \text{si } x \geqslant 0\\ \left(A + \dfrac{1}{(1+x)^{N+1}}\right)(-x)^N & \text{si } x < 0\end{cases}$$

Que $x$ soit positif ou négatif le majorant tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, ce qui prouve en passant à la limite que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k+1)x^k$.

# III Probabilités

### *III. A – Loi zêta*

**Q 20.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\zeta(x)n^x} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)n^x} = 1$ donc $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{\zeta(x)n^x}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

**Q 21.** X admet une espérance finie si et seulement si la série $\displaystyle\sum \frac{n}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$ converge, soit $x > 2$, et dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\zeta(x)} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-1}} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$.

**Q 22.** D'après le théorème de transfert, $X^k$ admet une espérance finie si et seulement si la série $\displaystyle\sum \frac{n^k}{\zeta(x)n^x} = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}}$ converge, soit $x > k+1$, et dans ce cas, $\mathbb{E}(X^k) = \dfrac{1}{\zeta(x)} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x-k}} = \frac{\zeta(x-k)}{\zeta(x)}$.

**Q 23.** X admet une variance lorsqu'elle admet un moment d'ordre 2, soit lorsque $x \geqslant 3$, et dans ce cas,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\zeta(x-k)\zeta(x) - \zeta(x-1)^2}{\zeta(x)^2}.$$

**Q 24.** $\mathbb{P}(X \in a\mathbb{N}^*) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = na) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(x)(an)^x} = \frac{1}{a^x\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{a^x}$.

### *III. B – Mutuelle indépendance*

**Q 25.** Soit I un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$. Puisque les $q_i$ sont premiers entre eux, $\displaystyle\bigcap_{i \in I} q_i\mathbb{N}^* = q\mathbb{N}^*$ avec $q = \displaystyle\prod_{i \in I} q_i$ et d'après la question 24, $\mathbb{P}\Big(X \in \displaystyle\bigcap_{i \in I} q_i\mathbb{N}^*\Big) = \dfrac{1}{q^x} = \displaystyle\prod_{i \in I} \frac{1}{q_i} = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X \in q_i\mathbb{N}^*)$. Les événements $[X \in q_i\mathbb{N}^*]$ sont donc mutuellement indépendants.

**Q 26.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} \subset B_n$ donc d'après le théorème de la limite monotone, $\lim \mathbb{P}(B_n) = P\Big(\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_k\Big)$. Or $n \in \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k$ ne divise pas $n$, soit $n = 1$. Donc $\lim \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{\zeta(x)}$.
Par ailleurs, par indépendance mutuelle $\mathbb{P}(B_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{p_k^x}\Big)$ donc $\dfrac{1}{\zeta(x)} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_k^x}\Big)$.

### *III. C – Deux variables indépendantes suivant une loi zêta*

**Q 27.** Un nombre premier $p$ divise à la fois X et Y si et seulement si $X \in p\mathbb{N}^*$ et $Y \in p\mathbb{N}^*$ donc l'événement « $p$ divise à la fois X et Y » coïncide avec l'événement $[X \in p\mathbb{N}^*] \cap [Y \in p\mathbb{N}^*]$. Par passage au complémentaire on en déduit : $A = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \Big([X \notin p_k\mathbb{N}^*] \cup [Y \notin p_k\mathbb{N}^*]\Big) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n$.
La suite $(C_n)$ est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, $\mathbb{P}(A) = \lim \mathbb{P}(C_n)$.
Puisque X et Y sont indépendantes, $\mathbb{P}\Big([X \in p_k\mathbb{N}^*] \cap [Y \in p_k\mathbb{N}^*]\Big) = \mathbb{P}(X \in p_k\mathbb{N}^*)\mathbb{P}(Y \in p_k\mathbb{N}^*) = \Big(\dfrac{1}{p_k^x}\Big)^2 = \dfrac{1}{p_k^{2x}}$ donc

$$\mathbb{P}\Big([X \notin p_k\mathbb{N}^*] \cup [Y \notin p_k\mathbb{N}^*]\Big) = 1 - \frac{1}{p_k^{2x}}.$$

D'après la question 25 les événements $\Big([X \notin p_k\mathbb{N}^*] \cup [Y \notin p_k\mathbb{N}^*]\Big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont mutuellement indépendants.
On en déduit que $\mathbb{P}(C_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{1}{p_k^{2x}}\Big)$ et d'après la question 26, $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{\zeta(2x)}$.

### *III. D – Deux variables indépendantes suivant une loi uniforme*

**Q 28.** $W_n$ appartient à $k\mathbb{N}^*$ si et seulement si $k$ divise à la fois $U_n$ et $V_n$ donc

$$\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \mathbb{P}\Big([k \text{ divise } U_n] \cap [k \text{ divise } V_n]\Big) = \mathbb{P}(k \text{ divise } U_n)\mathbb{P}(k \text{ divise } V_n)$$

car $U_n$ et $V_n$ sont indépendantes. Sachant qu'il y a $\lfloor n/k \rfloor$ multiples de $k$ dans $[\![1, n]\!]$, on en déduit : $\mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \Big(\dfrac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\Big)^2$.

**Q 29.** Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{m} \ell_k = \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k)$ (la somme est finie).

Or $\sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k) \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) = 1$ donc par passage à la limite : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant 1$.

Par ailleurs, $1 - \sum_{k=1}^{m} \ell_k = \lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(W_n = k)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k)$.

Or $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n = k) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2 \leqslant \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier M à partir duquel $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \epsilon$ et en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ on obtient : $\forall m \geqslant \mathrm{M}$, $0 \leqslant 1 - \sum_{k=1}^{m} \ell_k \leqslant \epsilon$.

**Q 30.** La suite $(\ell_k)$ est à valeurs positives et d'après la question précédente, $\sum_{k=1}^{+\infty} \ell_k = 1$ donc on définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $\mathbb{P}(W = k) = \ell_k$.

**Q 31.** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(W_n \in k\mathbb{N}^*) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lfloor n/k \rfloor}{n}\right)^2$.

Or $\frac{1}{k} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} \leqslant \frac{1}{k}$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor n/k \rfloor}{n} = \frac{1}{k}$ et ainsi, $\mathbb{P}(W \in k\mathbb{N}^*) = \frac{1}{k^2}$.
D'après la question 24 et le résultat admis, on en déduit que W suit la loi de probabilité zêta de paramètre 2.

En conséquence, $\ell_1 = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(W_n = 1) = \mathbb{P}(W = 1) = \frac{1}{\zeta(2)}$ ; quand $n$ tend vers $+\infty$, la probabilité que deux entiers choisis indépendamment et uniformément dans $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux tend vers $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$.