

OPÉRATEUR DE DIFFÉRENCE — CENTRALE PC 2016 (EXTRAIT)

Durée : 4 heures

Dans tout le texte, \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels, \mathbb{R} l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n .

Pour $a < b$ dans \mathbb{Z} , on note $\llbracket a, b \rrbracket$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1} . On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\text{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P , c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\frac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \rightarrow E$, on définit l'application $f^k : E \rightarrow E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p .

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A – L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{pmatrix}$$

Q 1. Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\text{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.

Q 2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P .

Q 3. Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j .

Q 4. L'application τ est-elle bijective? Si oui, préciser τ^{-1} . L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

Q 5. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j .

Q 6. On se donne une suite réelle (u_k) et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Q 7. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

Q 8. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)$. Quelle est la suite (v_k) définie par la formule (1)? Vérifier alors la formule (2).

I.B – L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{pmatrix}$$

- Q 9. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\text{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$.
- Q 10. En déduire le noyau $\text{Ker}(\delta)$ et l'image $\text{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ .
- Q 11. Plus généralement, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, montrer les égalités suivantes :

$$\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (3)$$

- Q 12. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.
- Q 13. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (4)$$

Q 14. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

- a) Montrer que u et δ^2 commutent.
- b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u .
- c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- d) Conclure.

Q 15. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ .

- a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille?
- b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes $H_0 = 1$ et $H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

II.A – Généralités

- Q 16. Montrer que la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- Q 17. Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1} .
- Q 18. La matrice M définie à la question 3 et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables?

- Q 19. Montrer que, pour $k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$

- Q 20. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0)H_k$.

II.B – Polynômes à valeurs entières

- Q 21. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $k \geq n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
- Q 22. En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.
- Q 23. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

Q 24. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont entières.

Q 25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

III Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ , on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1) - f(x) \end{pmatrix}$$

III.A –

Q 26. Montrer que $\delta(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Comparer $\delta(f)'$ et $\delta(f')$.

Q 27. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $\delta^n(f)(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $\llbracket 0, n \rrbracket$).

Q 28. Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0, 1[$ tel que $\delta(f)(x) = f'(x + y_1)$.

Q 29. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0, n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n) \quad (5)$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

III.B – On considère dans toute la suite de cette partie un réel α . On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

Q 30. Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à \mathbb{N}^* .

Q 31. Montrer que α est positif ou nul.

Q 32. On considère l'application f_α définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

III.C – On applique la relation (5) à la fonction f_α et à l'entier $n = [\alpha] + 1$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

Q 33. Montrer que l'expression $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$ est un entier relatif.

Q 34. Les notations sont celles de la question 29. Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

Q 35. Conclure.

