Corrigé : opérateur de différence — Centrale PC 2016 (extrait)

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I. A – L'opérateur de translation

Q 1. Si $d = \deg(P)$ et $a = \mathrm{cd}(P)$ on peut écrire $P = aX^d + Q$ avec $Q \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ et alors $P(X+1) = a(X+1)^d + Q(X+1) = aX^d + R(X)$ avec $R \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ donc $\deg(\tau(P)) = d = \deg(P)$ et $\mathrm{cd}(\tau(P)) = a = \mathrm{cd}(P)$.

Q 2. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\tau^k(P) = P(X+k)$:

- c'est évident pour $k = 0$;
- si $k \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $k-1$. Alors $\tau^k(P) = \tau(\tau^{k-1}(P)) = \tau(P(X+k-1)) = P(X+k)$ donc le résultat est vrai au rang k ; la récurrence se propage.

Q 3. Pour $j \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\tau(P_j) = (X+1)^{j-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$.

Par ailleurs, par définition de M, $\tau(P_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} M_{i,j} P_i$ donc en identifiant : $M_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Q 4. τ est bijective puisqu'à l'évidence son inverse est $\tau^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X-1) \end{array} \right.$.

De même, il est tout aussi évident que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\tau^k)^{-1}(P) = P(X-k)$. Or $(\tau^k)^{-1} = \tau^{-k}$ donc l'expression trouvée à la question 2 reste valable pour $k \in \mathbb{Z}$.

Q 5. On procède comme en 3 : $\tau^{-1}(P_j) = (X-1)^{j-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} (-1)^{j-1-i} X^i = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$ donc

$$(M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \dbinom{j-1}{i-1} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 6. On cherche une matrice Q telle que pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $v_{k-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} Q_{i,j} u_{j-1}$. Il suffit donc de poser

$$Q_{i,j} = \begin{cases} \dbinom{i-1}{j-1} & \text{si } j \leqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 7. On constate que $Q = M^T$. On a donc $Q^{-1} = (M^{-1})^T$ et $\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (M^{-1})^T \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, $u_{i-1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (M^{-1})^T_{i,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} (M^{-1})_{j,i} v_{j-1}$ ce qui donne en ré-indexant et en utilisant la question 5 :

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.$$

Q 8. Lorsque $u_k = \lambda^k$ nous avons $v_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^k = (\lambda+1)^k$ d'après la formule du binôme. Ainsi,

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = (\lambda+1-1)^k = \lambda^k = u_k$$

et la formule (I.2) est bien vérifiée.

I. B – L'opérateur de différence

Q 9. Posons $d = \deg(\mathrm{P})$ et $a = \mathrm{cd}(\mathrm{P})$, et notons b le coefficient de X^{d-1} (qui existe puisque P est supposé non constant donc $d \geqslant 1$). Alors $\mathrm{P} = a\mathrm{X}^d + b\mathrm{X}^{d-1} + \mathrm{Q}$ avec $\deg(\mathrm{Q}) \leqslant d-2$, et

$$\delta(\mathrm{P}) = a(\mathrm{X}+1)^d - a\mathrm{X}^d + b(\mathrm{X}+1)^{d-1} - b\mathrm{X}^{d-1} + \mathrm{Q}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}) = ad\mathrm{X}^{d-1} + \mathrm{R}(\mathrm{X})$$

où $\deg(\mathrm{R}) \leqslant d-2$. On en déduit $\deg(\delta(\mathrm{P})) = d-1 = \deg(\mathrm{P}) - 1$ et $\mathrm{cd}(\delta(\mathrm{P})) = ad = \mathrm{cd}(\mathrm{P}) \cdot \deg(\mathrm{P})$.

Q 10. D'après la question précédente si P n'est pas constant $\delta(\mathrm{P})$ est non nul. En revanche si P est constant $\delta(\mathrm{P}) = 0$ donc $\mathrm{Ker}(\delta) = \mathbb{R}$.
Par ailleurs, la question précédente montre que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n+1 - \dim(\mathrm{Ker}(\delta)) = n$ donc $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$.

Q 11. Montrons par récurrence sur $j \in [\![1, n]\!]$ que $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$:

- la question précédente a traité le cas $j = 1$;
- si $j \in [\![2, n]\!]$, supposons le résultat acquis au rang $j-1$. Alors $\mathrm{P} \in \mathrm{Ker}(\delta^j) \iff \delta(\mathrm{P}) \in \mathrm{Ker}(\delta^{j-1}) = \mathbb{R}_{j-2}[\mathrm{X}]$.
  D'après la question 9, cette dernière condition équivaut à $\deg(\mathrm{P}) \leqslant j-1$ donc $\mathrm{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]$.
  Par ailleurs, $\mathrm{P} \in \mathrm{Im}(\delta^j) \iff \exists \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P} = \delta^j(\mathrm{Q}) \iff \exists \mathrm{R} \in \mathrm{Im}(\delta^{j-1}) \mid \mathrm{P} = \delta(\mathrm{R})$ en posant $\mathrm{R} = \delta^{j-1}(\mathrm{Q})$.
  Par hypothèse de récurrence, $\deg(\mathrm{R}) \leqslant n-j+1$ donc la question 9 montre que $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n-j$, soit $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$. Là encore, le théorème du rang permet d'affirmer que ces deux espaces sont de même dimension et donc que $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$. La récurrence se propage.

Q 12. On a $\delta = \tau - \mathrm{Id}$ et puisque τ et Id commutent on peut appliquer la formule du binôme :

$$\delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j.$$

Q 13. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] = \mathrm{Ker}(\delta^n)$ on a $\delta^n(\mathrm{P}) = 0$ ce qui se traduit d'après la question précédente par :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(\mathrm{P}) = 0 \iff \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{P}(\mathrm{X}+j) = 0.$$

En substituant à X la valeur 0 on obtient : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{P}(j) = 0.$

Q 14.

a) $\delta^2 = u^4$ donc $u \circ \delta^2 = u^5 = \delta^2 \circ u$: u et δ^2 commutent.

b) $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] = \mathrm{Ker}(\delta^2)$ donc pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, $\delta^2(u(\mathrm{P})) = u(\delta^2(\mathrm{P})) = u(0) = 0$, ce qui montre que $u(\mathrm{P}) \in \mathrm{Ker}(\delta^2) = \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$. $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ est bien stable par u.

c) Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et supposons $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $c = 0$ et $a = d$. Ainsi, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a & 2ab \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, égalité qu'il est impossible de satisfaire.

d) $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ est stable par u donc aussi par δ ; on peut donc considérer les endomorphismes induits sur ce sous-espace (que nous noterons toujours u et δ). Dans la base $(e) = (1, \mathrm{X})$ on a $\mathrm{Mat}_{(e)}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ devrait vérifier $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui ne se peut d'après la question précédente. Un tel endormorphisme u ne peut exister.

Q 15.

a) Pour tout $j \in [\![0, d]\!]$ nous avons $\deg(\delta^j(\mathrm{P})) = d - j$: la famille $(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \ldots \delta^d(\mathrm{P}))$ est échelonnée en degré donc engendre un espace de dimension $d+1$ inclus dans $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$. Sachant que $\dim \mathbb{R}_d[\mathrm{X}] = d+1$ cette famille est donc une base de $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

b) Soit $\mathrm{V} \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par δ, et $\mathrm{P} \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$ un polynôme de degré maximal dans V. Posons $d = \deg(\mathrm{P})$. Puisque V est stable, la question précédente montre que $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}] \subset \mathrm{V}$, et puisque P est de degré maximal dans V nous avons aussi $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$ soit en définitive $\mathrm{V} = \mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

II Étude d'une famille de polynômes

II.A – Généralités

Q 16. La famille $(H_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est échelonnée en degré et de cardinal $n+1$ donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 17. $\delta(H_0) = 0$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, $\tau(H_k) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) = \dfrac{1}{k!}\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j)$ donc

$$\delta(H_k) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\times\Big((X+1)-(X-k+1)\Big) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = H_{k-1}.$$

Q 18. Dans la base (H_k) nous avons $\tau(H_0) = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k)+H_k = H_{k-1}+H_k$ pour $k\in[\![1,n]\!]$ donc $\mathrm{Mat}_{(H_k)}(\tau) = M'$. Mais d'après la question 3, dans la base (P_k) de $\mathbb{R}_n[X]$ nous avons $\mathrm{Mat}_{(P_k)}(\tau) = M$. Les matrices M et M′ sont donc semblables.

Q 19. $H_\ell \in \mathbb{R}_\ell[X]$ donc si $k>\ell$ on a $\delta^k(H_\ell) = 0$. Si $k\leqslant \ell$ on a $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$ et $H_{\ell-k}(0) = \begin{cases}1 & \text{si } \ell-k=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.
Ainsi, dans tous les cas, $\delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases}1 & \text{si } k=\ell\\ 0 & \text{si } k\neq\ell\end{cases}$

Q 20. (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc il existe $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell H_\ell$.

Ainsi, $\delta^k(P) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell\delta^k(H_\ell)$ et d'après la question précédente, $\delta^k(P)(0) = a_k$. D'où : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\delta^k(P)(0)H_k$.

II.B – Polynômes à valeurs entières

Q 21. Si $k\in[\![0,n-1]\!]$, $H_n(k) = 0$ et si $k\geqslant n$, $H_n(k) = \dbinom{k}{n}$. Reste le cas où $k<0$. Posons $k=-p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(-p-j) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(j+p) = (-1)^n\frac{(n-1+p)!}{n!(p-1)!} = (-1)^n\binom{n-1+p}{n}.$$

Q 22. On constate que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $H_n(k)\in\mathbb{Z}$ donc $H_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.

Q 23. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\delta(P)(k) = P(k+1)-P(k)\in\mathbb{Z}$ donc si $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ on a aussi $\delta(P)(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.

Q 24. Si $P(Z)\subset\mathbb{Z}$, la question précédente montre à l'aide d'une récurrence immédiate que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\delta^j(P)(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ et en particulier $\delta^j(P)(0)\in\mathbb{Z}$. D'après la formule établie à la question 20, les coordonnées de P dans la base (H_k) sont bien à valeurs entières.

Réciproquement, si $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_jH_j$ avec $a_j\in\mathbb{Z}$, alors pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $P(k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_jH_j(k)$ et la question 21 a montré que $H_j(k)\in\mathbb{Z}$ donc $P(k)\in\mathbb{Z}$, ce qui établit l'équivalence demandée.

Q 25. Puisque $d=\deg P$ on a $P\in\mathbb{R}_d[X]$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d}\delta^k(P)(0)H_k$.

Mais pour $k\leqslant d$ l'entier $k!$ divise $d!$ donc $d!H_k$ est à coefficients entiers. Puisque $\delta^k(P)(0)\in\mathbb{Z}$, le polynôme $d!P$ est lui aussi à coefficients entiers.

La réciproque est fausse, comme le montre l'exemple du polynôme $P = \dfrac{X^2}{2}$. Le polynôme $2!P$ est bien à coefficients entiers et pourtant $P(1)\notin\mathbb{Z}$.

III Généralisation de l'opérateur de différence et application

III.A –

Q 26. L'application $x\mapsto f(x+1)$ est la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc est de classe $\mathscr{C}^\infty$; il en est de même de $\delta(f)$, différence de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.
Pour tout $x>0$, on a $\delta(f)'(x) = f'(x+1)-f'(x) = \delta(f')(x)$ donc $\delta(f)' = \delta(f')$.

Q 27. Le calcul réalisé à la question 12 reste valable et donne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0, \qquad \delta^n(f)(x) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(x+j).$$

Q 28. Soit $x > 0$. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, x+1]$ donc d'après le théorème des accroissements finis il existe $c_1 \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_1)$. En posant $y_1 = c_1 - x$ on a prouvé l'existence de $y_1 \in]0,1[$ tel que $\delta(f)(x) = f'(x+y_1)$.

Q 29. Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- si $n = 1$, le résultat demandé n'est autre que celui étabbli à la question précédente ;
- si $n > 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$ et appliquons-le à la fonction $\delta(f)$: il existe $y_{n-1} \in]0, n-1[$ tel que $\delta^{n-1}(\delta(f))(x) = \delta(f)^{(n-1)}(x + y_{n-1})$, soit $\delta^n(f)(x) = \delta(f^{(n-1)})(x + y_{n-1}) = f^{(n-1)}(x + 1 + y_{n-1}) - f^{(n-1)}(x + y_{n-1})$.
  Appliquons le théorème des accroissements finis à $f^{(n-1)}$ sur l'intervalle $[x + y_{n-1}, x + y_{n-1} + 1]$: il existe $c_n \in]x + y_{n-1}, x + y_{n-1} + 1[$ tel que $\delta^n(f)(x) = f^{(n)}(c_n)$.
  En posant $y_n = c_n - x$ on a $y_n \in]y_{n-1}, y_{n-1} + 1[$ donc $y_n \in]0, n[$ et $\delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x + y_n)$. La récurrence se propage.

III. B –

Q 30. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Considérons sa décomposition en facteurs premiers : $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j}$ où $p_1, \dots, p_j$ sont des nombres premmiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ des entiers naturels (non nuls).
Alors $k^\alpha = (p_1^\alpha)^{\alpha_1} \cdots (p_j^\alpha)^{\alpha_j}$ est un produit d'entiers naturels non nuls donc appartient à $\mathbb{N}^*$.

Q 31. Si on avait $\alpha < 0$ on aurait $2^\alpha \in]0,1[$ et il ne pourrait être entier. On a donc $\alpha \geqslant 0$.

Q 32. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$, $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ donc il y a deux cas possibles :

- s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = k$ alors $f^{(n)} = 0$ pour $n \geqslant k+1$;
- sinon pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $f_\alpha^{(n)}(x) \neq 0$.

En particulier, α est un entier naturel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tel que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$.

III. C –

Q 33. Puisque x est supposé entier, $f_\alpha(x+j) = (x+j)^\alpha$ est un entier d'après la question 32 et l'expression étudiée est donc un entier relatif.

Q 34. On a $f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(x+y_n)^{\alpha-n}$ avec $n-1 \leqslant \alpha < n$ donc $\alpha - n < 0$. Sachant que $x < x + y_n$ nous avons $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+y_n) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+y_n)^{\alpha-n} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = 0$.

Q 35. D'après les deux questions précédentes, la suite $(f_\alpha^{(n)}(x+y_n))_{x \in \mathbb{N}}$ (attention, ici n est fixé et x est une variable entière) est une suite d'entiers qui converge vers 0 ; elle est donc stationnaire, ce qui signifie qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $f_\alpha(x+y_n) = 0$. D'après la question 32, ceci a pour conséquence que α est un entier naturel.