

CORRIGÉ : TRANSFORMATION DE LAPLACE (CENTRALE PSI 2012)

I Préliminaires, définition de la transformation L

I. A – La convergence absolue d’une intégrale entraîne la convergence simple, donc $E \subset E'$.

I. B – Soit $x \in E$, et $y \geq x$. Puisque λ est à valeurs positives, $|f(t)|e^{-\lambda(t)y} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(|f(t)|e^{-\lambda(t)x})$, ce qui montre que $y \in E$.
Nous avons donc montré que $x \in E \implies [x, +\infty[\subset E$. En posant $a = \inf E$ (avec la convention $a = -\infty$ si E n’est pas minoré), ceci montre que $E =]a, +\infty[$ ou $E = [a, +\infty[$.

I. C – Notons $g : (t, x) \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ et appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètre sur l’intervalle $[x_0, +\infty[$, avec $x_0 \in E$:

- pour tout $x \geq x_0$, la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(t, x)$ est continue sur $[x_0, +\infty[$;
- pour tout $x \geq x_0$, $|f(t)|e^{-\lambda(t)x} \leq |f(t)|e^{-\lambda(t)x_0} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est intégrable puisque $x_0 \in E$, donc le théorème s’applique : Lf est continue sur $[x_0, +\infty[$, puis par recouvrement sur E tout entier.

II Exemples dans le cas de f positive

II. A – Lorsque f est à valeurs positives, $|f(t)| = f(t)$ donc convergence simple et absolues coïncident, et $E = E'$.

II. B – Dans les trois cas, on détermine E' puisque $E = E'$.

II. B. 1 Nous avons $\int_0^T \lambda'(t)e^{-\lambda(t)x} dt = \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{\lambda(0)x} - e^{-\lambda(T)x}) & \text{si } x \neq 0 \\ \lambda(T) - \lambda(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

λ est croissante et non majorée donc $\lim_{+\infty} \lambda(T) = +\infty$. Ainsi, l’intégrale ci-dessus possède une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$ si et seulement si $x > 0$. D’où $E =]0, +\infty[$.

II. B. 2 Nous avons $f(t)e^{-\lambda(t)x} = e^{\lambda(t)(t-x)}$ donc pour $t \geq x$ nous avons $f(t)e^{-\lambda(t)x} \geq 1$. Mais $t \mapsto 1$ n’est pas intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $x \notin E$. Ainsi, $E = \emptyset$.

II. B. 3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons cette fois $0 \leq f(t)e^{-\lambda(t)x} = \frac{e^{-\lambda(t)(x+t)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ pour $t \geq -x$. Or $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $x \in E$ et ainsi $E = \mathbb{R}$.

II. C –

II. C. 1 On a $f(t)e^{-\lambda(t)x} = \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ donc si $x \geq 0$, $f(t)e^{-\lambda(t)x} \leq \frac{1}{1+t^2}$ et si $x < 0$ alors $1 = O(f(t)e^{-\lambda(t)x})$ donc $E = [0, +\infty[$.

$$Lf(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

II. C. 2 Notons $h : (t, x) \mapsto \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur l’intervalle $[x_0, +\infty[$, avec $x_0 > 0$:

- pour tout $x \geq x_0$, la fonction $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$, et $\frac{\partial h}{\partial x}(t, x) = \frac{-t^2}{1+t^2} e^{-t^2x}$;
- pour tout $x \geq x_0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux, et $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(t, x) \right| \leq e^{-t^2x_0} = \psi(t)$.

La fonction ψ est continue par morceaux et intégrable donc le théorème s’applique : Lf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$, puis par recouvrement sur $]0, +\infty[$.

II. C. 3 De plus, $(Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-t^2x} dt$ donc $(Lf)(x) - (Lf)'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2x} dt$.

Le changement de variable bijectif $u = t\sqrt{x}$ donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2x} dt = \frac{A}{\sqrt{x}}$ avec $A = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

II. C. 4) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) = e^{-x}((Lf)'(x) - (LF)(x)) = -A \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable au voisinage de 0 donc d'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. g étant continue en 0 on en déduit que $g(x) = g(0) - A \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, avec $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

II. C. 5) Le changement de variable bijectif $t = u^2$ donne $g(x) = \frac{\pi}{2} - 2A \int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2} du$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2} - 2A^2$, compte tenu de l'expression initiale de A .

Par ailleurs, $g(x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} dt$ donc $0 \leq g(x) \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} e^{-x}$ et $\lim_{+\infty} g(x) = 0$. On en déduit que $A^2 = \frac{\pi}{4}$ puis que $A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ puisque $A \geq 0$.

III Étude d'un premier exemple

III. A – $e^t - 1 \sim t$ donc $\lim_0 f(t) = 0$. f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.

III. B – $f(t) \sim_{+\infty} \frac{t}{2}$ donc f est positive au voisinage de $+\infty$, et $f(t)e^{-tx} \sim_{+\infty} \frac{t}{2} e^{-xt}$.

Si $x > 0$ alors $f(t)e^{-xt} = O(e^{-xt/2})$ donc $x \in E$; si $x = 0$, $t \mapsto t$ n'est pas intégrable donc $0 \notin E$. Puisque E est un intervalle, $E =]0, +\infty[$.

III. C – Pour tout $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$, $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2} e^{-xt} dt = \frac{1}{2x^2}$ (résultat obtenu par une double intégration par parties), et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-(x+1)t}}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} te^{-(x+1)t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} \right) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) dt \quad \text{avec } f_n(t) = te^{-(x+n)t}.$$

On applique le théorème d'interversion somme / intégrale :

- les fonctions f_n sont intégrables sur $[0, +\infty[$;
- la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, et sa somme y est continue par morceaux;
- $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \frac{1}{(x+n)^2}$ (résultat obtenu par une double intégration par parties).

La série $\sum \frac{1}{(n+x)^2}$ converge donc le théorème s'applique, et $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

On conclut par linéarité : $(Lf)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

III. D – Notons maintenant $f_n(t) = \frac{1}{(n+x)^2}$. Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ on a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$ donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, +\infty[$. Chacune des fonctions f_n étant continue sur $[0, +\infty[$ il en est de même de leur somme, et ainsi : $\lim_0 \left((Lf)(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV Généralités dans le cas typique

IV. A – Soit $x_0 > \alpha = \inf E$. Notons $h : (t, x) \mapsto f(t)e^{-xt}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$:

- pour tout $x \geq x_0$, la fonction $t \mapsto h(t, x)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$;
- pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto h(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, +\infty[$, et $\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x) = (-t)^n f(t) e^{-tx}$;
- pour tout $x \geq x_0$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x)$ est continue par morceaux, et $\left| \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(t, x) \right| \leq t^n |f(t)| e^{-x_0 t} = \phi_n(t)$.

Puisque $x_0 > \alpha$, on peut choisir $x_1 \in E$ tel que $x_0 > x_1 > \alpha$. On a alors $t^n e^{-x_0 t} = o(e^{-x_1 t})$ donc $\phi_n(t) = O(|f(t)|e^{-x_1 t})$. Ceci prouve, puisque $x_1 \in E$, que la fonction ϕ_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
On en déduit que la fonction Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_0, +\infty[$ puis par recouvrement sur $]\alpha, +\infty[$, et que $(Lf)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n f(t) e^{-xt} dt$.

IV. B – $t \mapsto f(t) e^{-xt} = t^n e^{-(x+a)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $x + a > 0$; étant à valeurs positives on en déduit que $E = E' =]-a, +\infty[$.

Pour tout $x > -a$, le changement de variable bijectif $u = (x + a)t$ donne :

$$(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-(x+a)t} dt = \frac{1}{(x+a)^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}} \quad (\text{résultat classique})$$

IV. C – Comportement en l'infini

IV. C. 1) Par hypothèse il existe une fonction g bornée au voisinage de 0 telle que $f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k = t^{n+1} g(t)$. En intégrant on obtient : $\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-xt} dt = \int_0^\beta t^{n+1} g(t) e^{-xt} dt$.

La fonction g est bornée au voisinage de 0 donc il existe $c > 0$ telle que g est bornée sur $[0, c]$. Mais g est continue sur $[c, \beta]$ donc aussi bornée sur cet intervalle. Elle est donc bornée sur $[0, \beta]$, et

$$\left| \int_0^\beta t^{n+1} g(t) e^{-xt} dt \right| \leq \|g\|_{\infty, [0, \beta]} \int_0^\beta t^{n+1} e^{-xt} dt \leq \|g\|_{\infty, [0, \beta]} \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-xt} dt = \|g\|_{\infty, [0, \beta]} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Ceci prouve que $\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-xt} dt = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$.

IV. C. 2) Pour tout $x \in E \cap]0, +\infty[$ les fonctions $t \mapsto f(t) e^{-xt}$ et $t \mapsto t^n e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$ et en intégrant on obtient $(Lf)(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt = \int_\beta^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt + O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$, g étant définie à la question précédente.

Soit maintenant $a \in E \cap]0, +\infty[$. Pour tout $x > a$ on a :

$$\left| \int_\beta^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt \right| \leq \int_\beta^{+\infty} |g(t)| e^{-at} e^{-(x-a)t} dt \leq e^{-(x-a)\beta} \int_\beta^{+\infty} |g(t)| e^{-at} dt = O(e^{-\beta x}).$$

Puisque $e^{-\beta x} = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$ on en déduit que $(Lf)(x) - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^{k+1}} = O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$.

IV. D – Comportement en 0

IV. D. 1) f est bornée au voisinage de $+\infty$ donc lorsque t tend vers $+\infty$, $f(t) e^{-xt} = O(e^{-xt})$. Puisque $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable pour tout $x > 0$ on en déduit que $]0, +\infty[\subset E$.

IV. D. 2) Notons qu'une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et admettant une limite en $+\infty$ est bornée; on note $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de $|f|$ sur $\mathbb{R}^+$.

On a $x(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} x f(t) e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$ en posant $u = xt$. Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée :

- pour tout $u > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} = \ell e^{-u}$;
- pour tout $u > 0$, pour tout $x > 0$, $\left| f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \right| \leq \|f\|_\infty e^{-u} = \phi(u)$.

ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$ donc le théorème s'applique : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(Lf)(x) = \ell \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \ell$.

V Étude d'un deuxième exemple

V. A – On sait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge sans être absolument convergente, donc $0 \in E'$ mais $0 \notin E$.

V.B – La fonction f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f(t)|e^{-xt} \leq \|f\|_\infty e^{-xt}$. Pour tout $x > 0$ la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $]0, +\infty[\subset E$.

Sachant que E est un intervalle non majoré et que $0 \notin E$ on en déduit $E =]0, +\infty[$.

V.C – D'après IV.A on a $(Lf)'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt$. Une double intégration par parties conduit à :

$$- \int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt = \left[\cos t e^{-xt} + x \sin t e^{-xt} \right]_0^{t \rightarrow +\infty} + x^2 \int_0^{+\infty} \sin t e^{-xt} dt$$

ce calcul étant justifié par l'existence des limites en $+\infty$. Ainsi, $(Lf)'(x) = -1 - x^2(Lf)'(x)$, soit $(Lf)'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

V.D – On en déduit l'existence d'une constante C tel que pour tout $x > 0$, $(Lf)(x) = C - \arctan x$.

Pour tout $x > 0$, $|(Lf)(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (Lf)(x) = 0$, ce qui donne $C = \frac{\pi}{2}$ et donc $(Lf)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

V.E – Le changement de variable $t = n\pi + u$ donne $f_n(x) = (-1)^n e^{-n\pi x} \int_0^\pi \frac{\sin u}{n\pi + u} e^{-ux} du$.

On a $0 \leq e^{-(n+1)\pi x} \leq e^{-n\pi x}$ et pour tout $u \in [0, \pi]$, $0 \leq \frac{\sin u}{(n+1)\pi + u} e^{-ux} \leq \frac{\sin u}{n\pi + u} e^{-ux}$ donc $|f_{n+1}(x)| \leq |f_n(x)|$.

De plus, $|f_n(x)| \leq \int_0^\pi \frac{du}{n\pi + u} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x)| = 0$. On peut donc appliquer le critère spécial relatif aux séries

alternées et affirmer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ et que $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$.

Cette majoration est uniforme, donc la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.F – Le théorème de continuité des intégrales à paramètre montre sans difficulté que chacune de ces fonctions f_n est continue sur $[0, +\infty[$. Il en résulte que la somme de la série $\sum f_n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Or cette somme n'est autre que Lf , qui est donc continue sur $[0, +\infty[$, et en particulier en 0. Ainsi, $(Lf)(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (Lf)(x) = \frac{\pi}{2}$.

VI Étude de la borne inférieure de E

VI.A – Cas positif

VI.A.1) Supposons $\alpha \notin E$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ diverge, et puisque f est positive, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_0^y f(t)e^{-\lambda(t)x} dt = +\infty$.

Pour tout $M \in \mathbb{R}$ il existe donc $B > 0$ tel que $\int_0^B f(t)e^{-\lambda(t)x} dt \geq 2M$.

Puisque l'intervalle d'intégration est un segment, il est facile de montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^B f(t)e^{-\lambda(t)x} dt$ est continue sur $[\alpha, +\infty[$ (il suffit d'utiliser la fonction dominante $\phi(t) = f(t)e^{-\lambda(t)\alpha}$).

Ainsi, par continuité il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]\alpha, \alpha + \eta]$, $\int_0^B f(t)e^{-\lambda(t)x} dt \geq M$.

Puisque f est positive, on a a fortiori $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x} dt \geq M$.

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} Lf(x) = +\infty$, autrement dit que Lf n'est pas bornée, ce qui est contraire aux hypothèses. On en déduit que $\alpha \in E$.

VI.A.2) Puisque f est à valeurs positives, on a $x \leq y \implies \forall t \geq 0, f(t)e^{-\lambda(t)y} \leq f(t)e^{-\lambda(t)x}$ donc pour $x \leq y$ dans E , $(Lf)(y) \leq (Lf)(x)$. Ainsi, la fonction Lf est décroissante sur E . Elle admet donc en α une limite, finie ou égale à $+\infty$.

Mais puisque $\alpha \notin E$, la fonction Lf ne peut être bornée d'après la question précédente, et ainsi $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} Lf(x) = +\infty$.

VI.B – On a ici $(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt$ quand $x \in E'$.

VI. B. 1) Lorsque $x > 1$ on a $\left| \frac{\cos t}{(1+t)^x} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^x}$ et $t \mapsto \frac{1}{(1+t)^x}$ est intégrable donc $]1, +\infty[\subset E$.

Lorsque $x = 1$ on montre, à l'instar de l'intégrale de Dirichlet, que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t} dt$ est convergente sans être absolument convergente, donc $1 \notin E$ et ainsi $E =]1, +\infty[$ car E est un intervalle.

VI. B. 2) Une intégration par parties donne : $\int_0^B \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt = \frac{\sin B}{(1+B)^x} + x \int_0^B \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt$.

On a $\left| \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^{x+1}}$ donc lorsque $x > 0$ on a $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{\sin B}{(1+B)^x} = 0$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt$ converge absolument donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt$ converge. Ainsi, $]0, +\infty[\subset E'$.

Supposons maintenant $x \leq 0$ et raisonnons par l'absurde en supposant la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt$.

Dans ce cas, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt = 0$.

Mais $\int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1+2n\pi+t)^x} dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$ car $\frac{1}{(1+2n\pi+t)^x} \geq 1$ pour $x \leq 0$.

Ceci est absurde donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt$ diverge et $x \notin E'$. Ainsi, $E' =]0, +\infty[$.

VI. B. 3) On voudrait montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} (Lf)(x) = (Lf)(1)$ mais comme $1 \notin E$ il ne peut être question d'utiliser sous cette forme le théorème de convergence dominée puisque $(Lf)(1)$ est une intégrale semi-convergente. On transforme donc $(Lf)(x)$ à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^B \frac{\cos t}{(1+t)^x} dt = \left[\frac{\sin t}{(1+t)^x} \right]_0^B + x \int_0^B \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt$$

qui donne en passant à la limite $(Lf)(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt$.

Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée :

- pour tout $t \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} = \frac{\sin t}{(1+t)^2}$;
- pour tout $t \geq 0$, pour tout $x > 1$, $\left| \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} \right| \leq \frac{1}{(1+t)^2} = \phi(t)$.

La fonction ϕ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^{x+1}} dt =$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(1+t)^2} dt$, ce qui entraîne : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (Lf)(x) = (Lf)(1)$.