

# ÉTUDE DE L'APPLICATION $M \mapsto AM - MA$ (CCINP MP 2012)

Durée : 4 heures

Dans tout le problème,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'algèbre des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,  $(E_{i,j})$  sa base canonique ( $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ ) et  $I_n$  sa matrice unité (tous les coefficients de  $E_{i,j}$  sont nuls, sauf celui situé à la  $i^e$  ligne et à la  $j^e$  colonne, qui vaut 1).

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème,  $A$  est une matrice quelconque de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à la matrice  $A$ .

Pour tout  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ , on note  $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$ . L'ensemble des matrices  $P(A)$  pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$  est noté  $\mathbb{R}[A]$ .

On dit que  $P$  annule  $A$  lorsque  $P(A) = 0$ , ce qui équivaut à  $P(u) = 0$ . On appelle *polynôme minimal* de la matrice  $A$  le polynôme minimal de l'endomorphisme  $u$ ; c'est donc l'unique polynôme unitaire de degré minimal qui annule  $A$ . On admet que les polynômes annulateurs de  $A$  sont exactement les polynômes divisibles par le polynôme minimal de  $A$ .

On note  $\varphi_A$  l'application de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définie par :

$$\varphi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de  $\varphi_A$ . Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de  $\varphi_A$ , les parties III et IV en étudient les vecteurs propres. **Les quatre parties sont indépendantes.**

## Partie I – Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra  $n = 2$ .

**Q1.** Vérifier que l'application  $\varphi_A$  est linéaire et que  $I_2$  et  $A$  appartiennent à  $\text{Ker } \varphi_A$ .

Dans la suite de cette partie, on pose  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Q2.** Donner la matrice de  $\varphi_A$  dans la base  $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Dans la suite de cette partie, on suppose que  $\varphi_A \neq 0$  (c'est-à-dire que  $A \neq \lambda I_2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Q3.** Donner le polynôme caractéristique de  $\varphi_A$  sous forme factorisée.

**Q4.** En déduire que  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $(d - a)^2 + 4bc > 0$ .

**Q5.** Démontrer que  $\varphi_A$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable.

## Partie II – Étude du cas général

On note  $c = (c_1, \dots, c_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Q6.** On suppose dans cette question que  $A$  est diagonalisable.

On note  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $u$  (défini au début du problème) et, pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ ,  $\lambda_i$  la valeur propre associée au vecteur  $e_i$ . On note alors  $P$  la matrice de passage de la base  $c$  à la base  $e$  et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour tout couple  $(i, j)$  d'entiers tels que  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq n$ , on pose :

$$B_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$$

- a) Exprimer, pour tout couple  $(i, j)$ , la matrice  $DE_{i,j} - E_{i,j}D$  en fonction de la matrice  $E_{i,j}$  et des réels  $\lambda_i$  et  $\lambda_j$ .
- b) Démontrer que, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $B_{i,j}$  est un vecteur propre de  $\varphi_A$ .
- c) En déduire que  $\varphi_A$  est diagonalisable.

On suppose désormais, et ce jusqu'à la fin de la partie II, que  $\varphi_A$  est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$  une base de vecteurs propres de  $\varphi_A$  et, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\lambda_{i,j}$  la valeur propre associée à  $P_{i,j}$ .

**Q7.** Dans cette question, on considère  $A$  comme une matrice à coefficients complexes ( $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ) et  $\varphi_A$  comme un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (défini par  $\varphi_A(M) = AM - MA$  pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).

- a) Justifier que toutes les valeurs propres de  $\varphi_A$  sont réelles.
- b) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Justifier que si  $z$  est une valeur propre de  $A$ , alors  $z$  est aussi une valeur propre de  $A^T$ .
- c) Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On suppose que  $z$  et  $\bar{z}$  sont deux valeurs propres de la matrice  $A$ . On considère alors  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  ( $X \neq 0$ ) et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  ( $Y \neq 0$ ) tels que  $AX = zX$  et  $A^T Y = \bar{z}Y$ .

En calculant  $\varphi_A(XY^T)$ , démontrer que  $z - \bar{z}$  est une valeur propre de  $\varphi_A$ .

**Q8.** Déduire de la question précédente que la matrice  $A$  a au moins une valeur propre réelle.

On note  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  ( $X \neq 0$ ) une matrice colonne telle que  $AX = \lambda X$ .

**Q9.** Démontrer que, pour tout couple  $(i, j)$ , il existe un réel  $\mu_{i,j}$ , que l'on exprimera en fonction de  $\lambda$  et  $\lambda_{i,j}$ , tel que  $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$ .

**Q10.** En déduire que  $A$  est diagonalisable.

## Partie III – Étude des vecteurs propres de $\varphi_A$ associés à la valeur propre 0

Soit  $m$  le degré du polynôme minimal de  $A$ .

**Q11.** Démontrer que la famille  $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$  est une base de  $\mathbb{R}[A]$ .

**Q12.** Vérifier que  $\mathbb{R}[A]$  est inclus dans  $\text{Ker } \varphi_A$  et en déduire une minoration de  $\dim \text{Ker } \varphi_A$ .

**Q13.** *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme  $u$  (défini au début du problème) est nilpotent d'indice  $n$  (c'est-à-dire que  $u^n = 0$  et  $u^{n-1} \neq 0$ ). On considère un vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $u^{n-1}(y) \neq 0$  et, pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$ , on pose  $e_i = u^{n-i}(y)$ .

- a) Démontrer que la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Soient  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  et  $v$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $B$ .

Justifier l'existence de scalaires  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  tels que  $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$  ( $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ), puis prouver que  $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$ .

- c) En déduire  $\text{Ker } \varphi_A$ .

**Q14.** *Cas où  $u$  est diagonalisable*

On suppose que  $u$  est diagonalisable. On note  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  ( $1 \leq p \leq n$ ) les  $p$  valeurs propres distinctes de  $u$  et, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p$ ,  $E_u(\lambda_k)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_k$ . On note  $m_k$  la dimension de cet espace propre.

- a) Soient  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $v$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $B$ . Démontrer que  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  si et seulement si, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p$ ,  $E_u(\lambda_k)$  est stable par  $v$  (c'est-à-dire  $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$ ).
- b) En déduire que  $B \in \text{Ker } \varphi_A$  si et seulement si la matrice de  $v$ , dans une base adaptée à la décomposition de  $\mathbb{R}^n$  en somme directe des sous-espaces propres de  $u$ , a une forme que l'on précisera.
- c) Préciser la dimension de  $\text{Ker } \varphi_A$ .
- d) Lorsque  $n = 7$ , donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de  $p$  et des  $m_k$  (on ne demande pas de justification).

## Partie IV – Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie,  $\alpha$  est une valeur propre non nulle de  $\varphi_A$  et  $B$  un vecteur propre associé ( $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \neq 0$ ). On note  $\pi_B$  le polynôme minimal de  $B$  et  $d$  le degré de  $\pi_B$ .

**Q15.** Démontrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$ .

**Q16.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ . Exprimer  $\varphi_A(P(B))$  en fonction de  $\alpha$ ,  $B$  et  $P'(B)$ .

**Q17.** Démontrer que le polynôme  $X\pi'_B - d\pi_B$  est le polynôme nul ( $\pi'_B$  étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice  $B$ ).

**Q18.** En déduire que  $B^d = 0$ .

