

CORRIGÉ : ÉTUDE DE L'APPLICATION $M \mapsto AM - MA$ (CCINP MP 2012)Partie I – Étude du cas $n = 2$

Q1. Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda\varphi_A(M) + \varphi_A(N)$ donc φ_A est linéaire.

On a $\varphi_A(I) = A - A = 0$ et $\varphi_A(A) = A^2 - A^2 = 0$ donc I et A appartiennent à $\text{Ker } \varphi_A$.

Q2. On calcule successivement $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $\varphi_A(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix}$.

La matrice de φ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{pmatrix}.$$

Q3. Le polynôme caractéristique de φ_A vaut donc $\det(xI - U) = (\text{calcul}) = x^2(x^2 - (d-a)^2 - 4bc)$.

Q4. Traitons plusieurs cas :

– si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, $\chi_{\varphi_A} = X^2(X - \delta)(X + \delta)$ avec $\delta = \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}$, soit deux valeurs propres simples et une valeur propre double, en l'occurrence 0.

Mais la première question nous a permis de constater que $\text{Vect}(I, A) \subset \text{Ker } \varphi_A$ et puisqu'on suppose que A n'est pas la matrice d'une homothétie, $\dim \text{Vect}(I, A) = 2$ et ainsi $\dim \text{Ker } \varphi_A = 2$, ce qui montre que φ_A est diagonalisable ;

– si $(d-a)^2 + 4bc = 0$, $\chi_{\varphi_A} = X^4$. Mais $\varphi_A \neq 0$ donc φ_A n'est pas diagonalisable ;

– enfin, si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, χ_{φ_A} n'est pas scindé donc φ_A ne peut être diagonalisable.

Q5. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$. Traitons là encore trois cas :

– si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$, le polynôme χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable ;

– si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$, $\chi_A = (X - \delta)^2$ avec $\delta = \frac{a+d}{2}$, mais A n'est pas la matrice d'une homothétie donc A n'est pas diagonalisable ;

– si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$, le polynôme χ_A n'est pas scindé donc A n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$, soit encore $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

D'après la question précédente, on a bien que φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II – Étude du cas général

Q6.

a) On calcule sans peine $DE_{i,j} = \lambda_i E_{i,j}$ et $E_{i,j}D = \lambda_j E_{i,j}$ donc $DE_{i,j} - E_{i,j}D = (\lambda_i - \lambda_j)E_{i,j}$.

b) Par définition de P on a $A = PDP^{-1}$ donc $\varphi_A(B_{i,j}) = P(DE_{i,j} - E_{i,j}D)P^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j}$. La matrice $B_{i,j}$ étant non nulle, c'est un vecteur propre de φ_A pour la valeur propre $\lambda_i - \lambda_j$.

c) L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (son inverse est $M \mapsto P^{-1}MP$) donc l'image de la base canonique $(E_{i,j})$, autrement dit la famille $(B_{i,j})$, est encore une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question précédente cette base est constituée de vecteurs propres de φ_A , donc cet endomorphisme est diagonalisable.

Q7.

a) Puisque φ_A est supposée diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toutes ses valeurs propres sont réelles.

b) Une matrice et sa transposée ont même déterminant donc A et A^T ont même polynôme caractéristique. Ainsi, si z est valeur propre de A , elle est aussi valeur propre de A^T .

c) Puisque A est à coefficients réels, si z est racine de χ_A , c'est aussi le cas de $\bar{z}$. Il existe donc $X \in \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$ et $Y \in \mathbb{C}^n$, $Y \neq 0$ tels que $AX = zX$ et $A^T Y = \bar{z}Y$.

On calcule alors $\varphi_A(XY^T) = (AX)Y^T - X(Y^T A) = (AX)Y^T - X(A^T Y)^T = zXY^T - \bar{z}XY^T = (z - \bar{z})XY^T$.

Le coefficient de rang (i, j) de la matrice XY^T vaut $x_i y_j$ et puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ il existe $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $x_i y_j \neq 0$, soit $XY^T \neq 0$. Ceci montre que XY^T est vecteur propre de φ_A pour la valeur propre $z - \bar{z}$.

Q8. Soit z une valeur propre, réelle ou complexe, de A . La question précédente montre que $z - \bar{z}$ est valeur propre de φ_A . Mais cet endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est supposé diagonalisable donc toutes ses valeurs propres sont réelles. Ainsi, $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$. Mais par ailleurs, $z - \bar{z} \in i\mathbb{R}$ donc nécessairement, $z - \bar{z} = 0$, soit $z \in \mathbb{R}$. A possède donc au moins une valeur propre réelle.

Q9. On a $\varphi_A(P_{i,j}) = \lambda_{i,j}P_{i,j}$, soit $AP_{i,j} - P_{i,j}A = \lambda_{i,j}P_{i,j}$.

On en déduit en multipliant à droite par X que $AP_{i,j}X - \lambda_{i,j}P_{i,j}X = \lambda_{i,j}P_{i,j}X$, soit $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$ avec $\mu_{i,j} = \lambda_{i,j} + \lambda$.

Q10. On dispose ainsi d'une famille de n^2 vecteurs $Y_{i,j} = P_{i,j}X$ de $\mathbb{R}^n$ qui sont ou bien nuls, ou bien vecteurs propres de A . Nous allons montrer que cette famille est génératrice de $\mathbb{R}^n$, ce qui va nous permettre d'en extraire une base formée de vecteurs propres de A , ce qui nous permettra de conclure que A est diagonalisable.

Soit donc $Y \in \mathbb{R}^n$. Puisque X est non nul, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MX = Y$. Puisque $(P_{i,j})$ forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe des coefficients $\alpha_{i,j}$ tels que $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}P_{i,j}$ et alors $Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}Y_{i,j}$: la famille des $(Y_{i,j})$ est bien génératrice, et A est diagonalisable.

Partie III – Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

Q11. Supposons la famille $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ liée : il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k A^k = 0$. Le polynôme $\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$ est non nul et annule A , ce qui contredit le caractère minimal de m . Cette famille est donc libre.

Considérons maintenant un polynôme P quelconque, et effectuons la division euclidienne de P par M : $P = MQ + R$ avec $\deg R < m$.

On a $P(A) = M(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ car $M(A) = 0$, et $R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ puisque $\deg R < m$. Ceci montre que $(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$, et donc une base de cet espace.

Q12. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ les matrices A et $P(A)$ commutent donc $\varphi_A(P(A)) = 0$, soit $P(A) \in \text{Ker } \varphi_A$. Ainsi, $\dim(\text{Ker } \varphi_A) \geq \dim \mathbb{R}[A] = m$.

Q13.
a) Supposons la famille (e) liée : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. Considérons le plus grand entier k tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0_E$, soit $\sum_{i=1}^k \lambda_i u^{n-i}(y) = 0_E$.

Composons par u^{k-1} : $\sum_{i=1}^k \lambda_i u^{n-i+k-1}(y) = 0_E$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $n-i+k-1 \geq n$ donc $u^{n-i+k-1}(y) = 0_E$. Il ne reste alors que $\lambda_k u^{n-1}(y) = 0_E$ avec $\lambda_k \neq 0$ et $u^{n-1}(y) \neq 0_E$, ce qui est absurde.

La famille (e) est donc libre ; étant de cardinal n elle constitue une base de $\mathbb{R}^n$.

b) (e) est une base donc le vecteur $v(y)$ se décompose dans cette base : il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $v(y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k u^{n-k}(y)$.

Posons $w = \sum_{k=1}^n \alpha_k u^{n-k}$ et montrons que $v = w$ en prouvant que ces deux endomorphismes coïncident sur la base (e) . Pour ce faire, on commencera par observer que u et v commutent puisque $B \in \text{Ker } \varphi_A \iff AB - BA = 0 \iff u \circ v - v \circ u = 0$, ainsi que u et w puisque w est un polynôme en u .

Soit donc $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a $v(e_j) = v \circ u^{n-j}(y) = u^{n-j} \circ v(y) = u^{n-j} \circ w(y) = w \circ u^{n-j}(y) = w(e_j)$ donc $v = w = \sum_{k=1}^n \alpha_k u^{n-k}$.

c) Nous avons prouvé que si $B \in \text{Ker } \varphi_A$ alors $v \in \mathbb{R}[u]$, soit $B \in \mathbb{R}[A]$. La réciproque a été établie à la question 12, donc $\text{Ker } \varphi_A = \mathbb{R}[A] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{m-1})$ et $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = m$.

Q14.
a) Supposons $B \in \text{Ker } \varphi_A$. Alors $u \circ v = v \circ u$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour tout $x \in E_u(\lambda_k)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda_k x) = \lambda_k v(x)$ donc $v(x) \in E_u(\lambda_k)$: les sous-espaces propres $E_u(\lambda_k)$ sont stables par v .

Réciproquement, supposons les $E_u(\lambda_k)$ stables par v .

u est diagonalisable donc pour tout $x \in E$, il existe $(x_1, \dots, x_p) \in E_u(\lambda_1) \times \dots \times E_u(\lambda_p)$ tel que $x = \sum_{k=1}^p x_k$.

Alors $v \circ u(x) = v\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^p \lambda_k v(x_k)$ et $u \circ v(x) = \sum_{k=1}^p u(v(x_k)) = \sum_{k=1}^p \lambda_k v(x_k)$ car $v(x_k) \in E_u(\lambda_k)$. Ainsi, nous avons prouvé que $u \circ v = v \circ u$, soit $B \in \text{Ker } \varphi_A$.

b) Traduit matriciellement, ceci signifie que dans une base (e) adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{k=1}^p E_u(\lambda_k)$, B appartient à $\text{Ker } \varphi_A$ si et seulement si $\text{Mat}_{(e)}(v) = \text{diag}(B_1, \dots, B_p)$ où B_k est un bloc carré d'ordre m_k .

c) On en déduit que $\dim \text{Ker}(\varphi_A) = \sum_{k=1}^p m_k^2$.

d) Lorsque $n = 7$ on a $p \in \llbracket 1, 7 \rrbracket$ (entre 1 et 7 valeurs propres distinctes).

- si $p = 7$ alors $m_1 = \dots = m_7 = 1$ et $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 7$;
- si $p = 6$ alors (quitte à permuter les sous-espaces propres) $m_1 = 2$ et $m_2 = \dots = m_6 = 1$ donc $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 9$;
- si $p = 5$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) = (3, 1, 1, 1, 1)$ ou $(2, 2, 1, 1, 1)$ donc $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 13$ ou 11 ;
- si $p = 4$ alors $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (4, 1, 1, 1)$ ou $(3, 2, 1, 1)$ donc $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 19$ ou 15 ;
- si $p = 3$ alors $(m_1, m_2, m_3) = (5, 1, 1)$ ou $(4, 2, 1)$ ou $(3, 3, 1)$ ou $(3, 2, 2)$ donc $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 27$ ou 21 ou 19 ou 17 ;
- si $p = 2$ alors $(m_1, m_2) = (6, 1)$ ou $(5, 2)$ ou $(4, 3)$ donc $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 37$ ou 29 ou 25 ;
- si $p = 1$ alors $m_1 = 7$ et $\dim(\text{Ker } \varphi_A) = 49$.

Partie IV – Étude des vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle

Q15. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A(B^k) = \alpha k B^k$:

- pour $k = 0$, $\varphi_A(B^0) = \varphi_A(I_n) = 0$ donc la formule est bien vérifiée pour $k = 0$;
- si $k > 0$, supposons $\varphi_A(B^{k-1}) = \alpha(k-1)B^{k-1}$. Alors

$$\varphi_A(B^k) = AB^k - B^kA = (AB^{k-1} - B^{k-1}A)B + B^{k-1}(AB - BA) = \varphi_A(B^{k-1})B + B^{k-1}\varphi_A(B) = \alpha(k-1)B^k + \alpha B^k = \alpha k B^k$$

donc la récurrence se propage.

Q16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, que l'on note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Alors :

$$\varphi_A(P(B)) = \sum_{k=0}^d a_k \varphi_A(B^k) = \sum_{k=0}^d a_k \alpha k B^k = \alpha B \sum_{k=1}^d k a_k B^{k-1} = \alpha B P'(B)$$

Q17. Appliquons ce qui précède au polynôme minimal π_B . On a $\pi_B(B) = 0$ et $\varphi_A(0) = 0$ donc $0 = \alpha B \pi'_B(B)$: le polynôme $X \pi'_B$ est un polynôme annulateur de B .

Mais on a $\deg X \pi'_B = \deg \pi_B$ et puisque π_B est le polynôme minimal, il existe un scalaire λ tel que $X \pi'_B = \lambda \pi_B$. La considération du coefficient dominant dans cette égalité impose $d = \lambda$, et donc $X \pi'_B - d \pi_B = 0$.

Q18. Posons $\pi_B = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. On a $X \pi'_B = \sum_{k=0}^d k a_k X^k$ donc l'égalité $d \pi_B = X \pi'_B$ impose :

$$\forall k \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad (d-k)a_k = 0$$

soit $a_k = 0$ pour $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. Sachant que π_B est unitaire, on a $a_d = 1$ et ainsi $\pi_B = X^d$, ce qui conduit à $B^d = 0$.