Séries entières matricielles (X PSI 2024)

Durée : 4 heures

Notations

Dans tout cet énoncé, $n \geqslant 2$ désigne un entier naturel.

- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!]$, on note $[A]_{i,j}$ le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. La matrice transposée de A est notée $A^T \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et sa matrice conjuguée est notée $\overline{A} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les coefficients de $\overline{A}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,m]\!], [\overline{A}]_{i,j} = \overline{[A]_{i,j}}$$

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on pose

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$$

- On note $\mathcal{V}(A)$ l'ensemble

$$\mathcal{V}(A) = \left\{P \in \mathbb{C}[X] \;\middle|\; P \neq 0 \text{ et } P(A) = 0\right\}$$

  (c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls et annulateurs de A).

Pour toute suite $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, on adopte les notations suivantes :

- on note $R_u \in [0,+\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k z^k$ et D_u son disque ouvert de convergence défini par

$$D_u = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| < R_u\right\}$$

- pour tout $z \in D_u$, on note $U(z)$ (avec U lettre majuscule) la somme

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$$

- On convient que $u^{(0)} = u$ et on note $u^{(1)}$ la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k^{(1)} = (k+1)u_{k+1}$$

  Plus généralement pour tout entier naturel $m \geqslant 0$, on pose

$$u^{(m+1)} = (u^{(m)})^{(1)}$$

  Pour tout $m \geqslant 0$ et tout $z \in D_{u^{(m)}}$ on pose

$$U^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(m)} z^k$$

- Si $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ est une autre suite de nombres complexes, on note $u + v$ la suite $(u_k + v_k)_{k\geqslant 0}$ et $u \star v$ la suite $(w_k)_{k\geqslant 0}$ de terme général donné par

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \quad \text{pour tout } k \geqslant 0$$

  On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *compatible avec u* si

$$\rho(A) < R_u$$

  On note $\mathbb{M}_n(u)$ l'ensemble de toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ compatibles avec u :

$$\mathbb{M}_n(u) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \rho(A) < R_u\right\}$$

Les parties III et IV de cet énoncé sont majoritairement indépendantes.

Partie I Préliminaires

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur R_u pour que $\mathbb{M}_n(u) = \varnothing$ et donner un exemple de u pour laquelle on a cette égalité.

2. Montrer que $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$ (0_n désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

3. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\mathrm{R}_u = +\infty$;

(ii) $\mathbb{M}_n(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

(iii) $\mathbb{M}_n(u) \neq \varnothing$ et $\forall \mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(u)$, $\forall \mathrm{B} \in \mathbb{M}_n(u)$, $\mathrm{A}+\mathrm{B} \in \mathbb{M}_n(u)$;

et donner un exemple de suite u vérifiant ces trois assertions et telle que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes

(i) $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(v)$ pour toute suite $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{R}_v > 0$;

(ii) A est nilpotente.

5. Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{D}_{u^{(m)}} = \mathrm{D}_u$$

6. Soit $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ une autre suite de nombres complexes. Montrer que

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u \star v)$$

7. On suppose dans cette question que $0 < \mathrm{R}_u \leqslant 1$. Soient $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(u)$ et $\mathrm{B} \in \mathbb{M}_n(u)$ deux matrices symétriques telle que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$. Montrer que $\mathrm{AB} \in \mathbb{M}_n(u)$.

Partie II Fonctions de matrices

soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \varnothing$. Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(u)$.

8. Montrer que $\mathcal{V}(\mathrm{A})$ est non vide.

9. Soit

$$m = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \exists \mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{A}) \text{ avec } \deg(\mathrm{P}) = k\right\}$$

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $p \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ vérifiant les trois conditions

(i) $p \in \mathcal{V}(\mathrm{A})$;

(ii) $\deg(p) = m$;

(iii) p unitaire.

On note désormais φ_{A} ce polynôme.

10. Soit $\mathrm{P} \in \mathcal{V}(\mathrm{A})$. Montrer que φ_{A} divise P.

11. Montrer que les racines de φ_{A} dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de A.

12. Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors φ_{A} est à coefficients réels (c'est-à-dire $\varphi_{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$).

On note désormais $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. On note $m_1 \geqslant 1, \cdots, m_\ell \geqslant 1$ les multiplicités de $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ respectivement en tant que racines de φ_{A}. Ainsi on a

$$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-\lambda_1)^{m_1} \cdots (\mathrm{X}-\lambda_\ell)^{m_\ell}$$

avec

$$m = m_1 + \cdots + m_\ell$$

13. Montrer que l'application

$$T : P \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_\ell), P'(\lambda_\ell), \cdots, P^{(m_\ell-1)}(\lambda_\ell)) \in \mathbb{C}^m$$

est un isomorphisme et en déduire qu'il existe un et un seul polynôme $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!],\ \forall k \in [\![0, m_i - 1]\!], \quad Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$$

Dans toute la suite, on pose

$$u(A) = Q(A)$$

14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $u(A) = P(A)$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!],\ \forall k \in [\![0, m_i - 1]\!], \quad P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$$

15. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n$$

16. On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Déterminer $u(A)$ dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où α, β et γ sont des réels fixés avec $\alpha \neq \beta$ et $\{\alpha, \beta\} \subset D_u$. On exprimera les coefficients de $u(A)$ en fonction α, β et γ, $U(\alpha)$ et $U(\beta)$.

17. Soit $B \in \mathbb{M}_n(u)$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$u(A) = R(A) \text{ et } u(B) = R(B)$$

b) On suppose que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$ et $BA \in \mathbb{M}_n(u)$. Montrer que

$$A u(BA) = u(AB) A$$

18. Soit $v = (v_k)_{k \geqslant 0}$ une autre suite de $\mathbb{C}$ telle que $A \in \mathbb{M}_n(v)$. On suppose dans cette question uniquement que les valeurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ sont réelles. Montrer que

$$(u \star v)(A) = u(A) v(A)$$

(après avoir justifié que $A \in \mathbb{M}_n(u \star v)$).

Partie III Cas de matrices diagonalisables

Soit $u = (u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \varnothing$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$. On suppose dans toute cette partie que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ ses valeurs propres avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

19. Montrer que

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_\ell)$$

20. Pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$ on définit le polynôme :

$$Q_k^A(X) = \prod_{j=1, j \neq k}^{\ell} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

(on notera que les polynômes Q_k^A dépendent de la matrice A).

a) Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A(A)$$

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, \ell]\!]$, $Q_k^A(A)$ est une projection dont on précisera l'image et le noyau.

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_k^A(A) = I_n$$

21. Soit $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer que

$$u(\mathrm{BAB}^{-1}) = \mathrm{B}u(\mathrm{A})\mathrm{B}^{-1}$$

22. Soit $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $\mathrm{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telles que $\mathrm{A} = \mathrm{SDS}^{-1}$.

a) Montrer que $u(\mathrm{D})$ est diagonale et que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad [u(\mathrm{D})]_{i,i} = \mathrm{U}([\mathrm{D}]_{i,i})$$

b) En déduire une expression de $u(\mathrm{A})$.

Partie IV Application à des cas particuliers

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 4$. Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition (C^*) suivante :

$$\mathrm{R}_u > 1 \qquad (\mathrm{C}^*)$$

23. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice donnée par

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le polynôme φ_{H} dans ce cas.

b) Soit $\mathrm{A} = \mathrm{H} + \alpha \mathrm{I}_n$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $|\alpha| < \mathrm{R}_u$. Montrer que

$$u(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{U}^{(k)}(\alpha)}{k!} \mathrm{H}^k$$

et en déduire que

$$u(\mathrm{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{U}(\alpha) & \dfrac{\mathrm{U}^{(1)}(\alpha)}{1!} & \dfrac{\mathrm{U}^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \dfrac{\mathrm{U}^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & \mathrm{U}(\alpha) & \dfrac{\mathrm{U}^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dfrac{\mathrm{U}^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \dfrac{\mathrm{U}^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathrm{U}^{(\alpha)} \end{pmatrix}$$

24. Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathrm{G} = \mathrm{YZ}^{\mathrm{T}}$$

où $\mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes tels que $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} = \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z} = 1$.

a) Montrer que G est de rang 1 et donner son image.

b) Montrer que 0 et $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ sont les seules valeurs propres de G.

c) En déduire que $\mathrm{G} \in \mathbb{M}_n(u)$.

d) Déterminer φ_{G} quand $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \neq 0$.

e) En déduire que si $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \neq 0$ alors

$$u(\mathrm{G}) = \mathrm{U}(0)\mathrm{I}_n + \frac{\mathrm{U}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}) - \mathrm{U}(0)}{\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}} \mathrm{G}$$

f) Déterminer une expression simple de $u(\mathrm{G})$ quand $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} = 0$.

25. Soit $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$[F]_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(j-1)} \text{ pour tout } (k,j) \in [\![1,n]\!]^2$$

où $\omega = e^{-2\pi i/n}$ (ici i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$).

a) Montrer que F est inversible et que $F^{-1} = \bar{F}$.

b) Montrer que $F^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $F^4 = I_n$ et que $F \in \mathbb{M}_n(u)$.

d) En déduire que

$$u(F) = \frac{1}{4}(U(1)(F+I_n) - U(-1)(F-I_n))(F^2+I_n) + \frac{i}{4}(U(i)(F+iI_n) - U(-i)(F-iI_n))(F^2-I_n)$$

26. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}(X = k)$ où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) On suppose que X suit une loi binomiale de paramètres (N, p). Vérifier que u satisfait la condition (C^*) et trouver une expression simple de $u(A)$ pour tout $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

b) On suppose que X suit un loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Vérifier que u satisfait la condition (C^*) et montrer que

$$u(A) = p(I_n - (1-p)A)^{-1}A$$

pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(u)$ diagonalisable.