Corrigé : séries entières matricielles (X PSI 2024)

Partie I Préliminaires

1. Pour tout $\epsilon > 0$, $\rho(\epsilon I_n) = \epsilon$ donc si $R_u > 0$ l'ensemble $\mathbb{M}_n(u)$ est non vide. Par contraposée, $\mathbb{M}_n(u) = \varnothing$ si et seulement si $R_u = 0$. C'est le cas par exemple lorsque $u_n = n!$.

2. Supposons $\mathbb{M}_n(u) = \{0_n\}$. D'après ce qui précède, $R_u > 0$; mais alors pour tout $\epsilon \in]0, R_u[$, $\epsilon I_n \in \mathbb{M}_n(u)$, ce qui est absurde. On a donc $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$.

3. Supposons $R_u = +\infty$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho(A) < R_u$ donc $\mathbb{M}_n(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a prouvé que $(i) \implies (ii)$.

Supposons $\mathbb{M}_n(u) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a donc $M_n(u) \neq \varnothing$ et pour tout $A, B \in \mathbb{M}_n(u)$, $A + B \in M_n(u)$. On a prouvé que $(ii) \implies (iii)$.

Supposons $\mathbb{M}_n(u) \neq \varnothing$ et pour tout $A, B \in M_n(u)$, $A + B \in M_n(u)$. Soit alors $A \in \mathbb{M}_n(u)$. D'après la question 2 on peut supposer $A \neq 0_n$ et donc $\rho(A) > 0$.
Par récurrence on établit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $kA \in \mathbb{M}_n(u)$ donc $\rho(kA) = k\rho(A) < R_u$, et en faisant tendre k vers $+\infty$ on obtient $R_u = +\infty$. On a prouvé que $(iii) \implies (i)$.
La suite $u_k = \dfrac{1}{k!}$ vérifie la condition (i) donc aussi les conditions (ii) et (iii).

4. Supposons que pour toute suite v vérifiant $R_v > 0$ on ait $A \in \mathbb{M}_n(v)$.
Soit $\epsilon > 0$. En appliquant ceci à la suite $v_k = \dfrac{1}{\epsilon^k}$ on obtient que $\rho(A) < R_v = \epsilon$ et donc, en faisant tendre ϵ vers 0, que $\rho(A) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on en déduit que $A^n = 0$: A est nilpotente.

Réciproquement, supposons A nilpotente, et considérons une suite v telle que $R_v > 0$. On a $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donc $\rho(A) = 0$ et ainsi $A \in \mathbb{M}_n(v)$.
On a bien prouvé l'équivalence entre les assertions (i) et (ii).

5. On reconnait dans la série entière $\sum u^{(1)} x^k$ la série dérivée de la série $\sum u_k x^k$, et on sait d'après le cours qu'elles sont même rayon de convergence, donc $D_{u^{(1)}} = D_u$. On prouve ensuite par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que $D_{u^{(m)}} = D_u$.

6. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$. On a donc $\rho(A) < R_u$ et $\rho(A) < R_v$. Or on sait que $R_{u+v} \geqslant \min(R_u, R_v)$ et $R_{u*v} \geqslant \min(R_u, R_v)$ donc $A \in \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v)$. Ainsi, $M_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u*v)$.

7. On sait que deux matrices symétriques qui commutent sont co-diagonalisables. Or si D et D′ sont deux matrices diagonales, leur produit aussi et donc $\rho(DD') \leqslant \rho(D)\rho(D')$. Ainsi, $\rho(AB) \leqslant \rho(A)\rho(B)$.
Si A et B sont dans $\mathbb{M}_n(u)$ on a alors $\rho(AB) < R_u^2$, et lorsque $R_u \leqslant 1$, $\rho(AB) < R_u$, ce qui prouve que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$.

Partie II Fonctions de matrices

8. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, toute matrice possède un polynôme annulateur non nul donc $\mathscr{V}(A)$ est non vide.

9. D'après la question précédente l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \exists P \in \mathscr{V}(A) \text{ et } \deg P = k\right\}$ est non vide donc possède un élément minimal d. Soit donc $p \in \mathscr{V}(A)$ tel que $\deg p = d$. Quitte à le diviser par son coefficient dominant on peut supposer p unitaire.
Supposons l'existence d'un autre polynôme q vérifiant les mêmes conditions. Le polynôme $p - q$ annule aussi A mais est de degré strictement inférieur à d. Pour ne pas contredire le caractère minimal de d il est donc nécessaire que $p - q = 0$, ce qui assure l'unicité de p.

10. Soit $P \in \mathscr{V}(A)$. Réalisons la division euclidienne de P par φ_A : $P = Q\varphi_A + R$ avec $\deg R < \deg \varphi_A$. On a $P(A) = Q(A)\varphi_A(A) + R(A)$ avec $P(A) = 0$ et $\varphi_A(A) = 0$ donc $R(A) = 0$. Mais pour ne pas contredire le caractère minimal de $\deg \varphi_A$ il est nécessaire que $R = 0$, ce qui prouve que φ_A divise P.

11. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et la question précédente, φ_A divise χ_A, donc les racines de φ_A sont valeurs propres de A.
Réciproquement, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $Ax = \lambda x$. Alors $0 = \varphi_A(A) = \varphi_A(\lambda)x$ donc $\varphi_A(\lambda) = 0$. Les valeurs propres de A sont bien racines de φ_A.

12. φ_A annule A donc en conjuguant, $\overline{\varphi_A}$ annule $\overline{A}$ (en notant $\overline{\varphi_A}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de φ_A). Ainsi, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\overline{\varphi_A}$ annule A. mais ce polynôme est unitaire et de même degré que φ_A donc d'après la question 9, $\overline{\varphi_A} = \varphi_A$, soit $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$.

13. La linéarité de T résulte de la linéarité de l'opérateur de dérivation.
Considérons $P \in \operatorname{Ker} T$. Pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, λ_k est racine d'ordre au moins m_k donc $(X-\lambda_k)^{m_k}$ divise P. Il en résulte que φ_A divise P. Or $\deg P < m = \deg \varphi_A$, donc $P = 0$.
Ainsi, T est injectif, et donc bijectif puisque $\dim \mathbb{C}_{m-1}[u] = \dim \mathbb{C}^m$.
Il existe donc un unique antécédent Q au k-uplet $\big(U(\lambda_1), \dots, U^{(m_1-1)}(\lambda_1), \dots, U(\lambda_\ell), \dots, U^{(m_\ell-1)}(\lambda_\ell)\big)$.

14. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = Q(A)$. Le polynôme $P-Q$ annule A donc φ_A divise $P-Q$. Pour tout $i \in [\![1,\ell]\!]$, λ_i est donc racine de $P-Q$ d'ordre au moins égal à m_i, et ainsi, pour tout $k \in [\![0, m_i-1]\!]$, $(P-Q)^{(k)}(\lambda_i) = 0$, soit $P^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$.
Réciproquement, supposons pour tout $i \in [\![1,\ell]\!]$ et tout $k \in [\![0, m_i-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda_i) = Q^{(k)}(\lambda_i)$. Ceci a pour conséquence que φ_A divise $P-Q$, et puisque φ_A annule A, que $(P-Q)(A) = 0$, soit $P(A) = Q(A) = u(A)$.

15. Le polynôme $X - \alpha$ est unitaire, annule $A = \alpha I_n$ et est manifestement de degré minimal donc $\varphi_A = X - \alpha$. On a donc ici $m = 1$, $\lambda_1 = \alpha$ et $m_1 = 1$. Le polynôme Q défini à la question 13 est alors le polynôme constant $Q = U(\alpha)$, et ainsi, $u(\alpha I_n) = Q(\alpha I_n) = Q(\alpha) I_n = U(\alpha) I_n$.

16. On a ici $\chi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$ et puisque φ_A divise χ_A et a les mêmes racines, $\varphi_A = (X-\alpha)(X-\beta)$. D'après l'interpolation de Lagrange, $Q = U(\alpha)\dfrac{X-\beta}{\alpha-\beta} + U(\beta)\dfrac{X-\alpha}{\beta-\alpha}$ donc $u(A) = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\Big(U(\alpha)\big(A-\beta I_2\big) - U(\beta)\big(A-\alpha I_2\big)\Big) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \gamma\dfrac{U(\alpha)-U(\beta)}{\alpha-\beta} \\ 0 & U(\beta) \end{pmatrix}$.

17. *a)* Notons $\varphi_A = (X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_\ell)^{m_\ell}$ et $\varphi_B = (X-\mu_1)^{n_1} \cdots (X-\mu_p)^{n_p}$. D'après la question 14, tout polynôme R vérifiant les conditions d'interpolation $R^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$ et $R^{(k)}(\mu_j) = U^{(k)}(\mu_j)$ vérifie $R(A) = u(A)$ et $r(B) = u(B)$.

b) D'après la question précédente, il existe un polynôme R tel que $u(AB) = R(AB)$ et $u(BA) = R(BA)$.
Posons $R = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors $AR(BA) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} A(BA)^k = \sum_{k=0}^{d} (AB)^k A = R(AB)A$ donc $Au(BA) = u(AB)A$.

18. A appartient à $\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v)$ donc à $\mathbb{M}_n(u*v)$ (question 6).
Soit P et Q deux polynômes vérifiant respectivement : $\forall i \in [\![1,\ell]\!]$, $\forall k \in [\![0, m_i-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i)$ et $Q^{(k)}(\lambda_i) = V^{(k)}(\lambda_i)$.
D'après la formule de Leibniz, $(PQ)^{(k)}(\lambda_i) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} P^{(j)}(\lambda_i) Q^{(k-j)}(\lambda_i) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} U^{(j)}(\lambda_i) V^{(k-j)}(\lambda_i) = (UV)^{(k)}(\lambda_i)$. (Cette dernière égalité est licite car $\lambda_i \in \mathbb{R}$ donc on dérive UV par rapport à une variable réelle.)
Sachant que $u*v$ est le produit de Cauchy des deux suites u et v, on a alors $(u*v)(A) = (PQ)(A) = P(A)Q(A) = u(A)v(A)$.

Partie III Cas des matrices diagonalisables

19. Puisque A est diagonalisable, le polynôme $(X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_\ell)$ annule A. Sachant que φ_A a les mêmes racines que χ_A (question 11), il vient $\varphi_A = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_\ell)$.

20. *a)* Considérons le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A$. Il vérifie : $\forall k \in [\![1,\ell]\!]$, $P(\lambda_k) = U(\lambda_k)$ donc d'après la question 14,

$$u(A) = P(A) = \sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A(A)$$

b) Soit $i \in [\![1,\ell]\!]$, et $x \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I_n)$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A^j x = \lambda_i^j x$ donc par linéarité $Q_k^A(x) = Q_k^A(\lambda_i)x = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ x & \text{si } i = k \end{cases}$.

A étant diagonalisable, $Q_k(A)$ est le projecteur spectral sur $\operatorname{Ker}(A-\lambda_k I_n)$, parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{j\neq k} \operatorname{Ker}(A-\lambda_j I_n)$.

c) Puisque $\mathrm{E} = \bigoplus_k \mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \lambda_k \mathrm{I}_n)$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$.

21. A et BAB^{-1} sont semblables donc BAB^{-1} est diagonalisable, $\varphi_{\mathrm{BAB}^{-1}} = \varphi_{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{Q}_k^{\mathrm{BAB}^{-1}} = \mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}$. D'après la question 20a, $u(\mathrm{BAB}^{-1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{U}(\lambda_k)\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}(\mathrm{BAB}^{-1})$.
Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{BAB}^{-1})^k = \mathrm{BA}^k\mathrm{B}^{-1}$ (récurrence élémentaire) donc par linéarité, pour tout polynôme P on a $\mathrm{P}(\mathrm{BAB}^{-1}) = \mathrm{BP}(\mathrm{A})\mathrm{B}^{-1}$. C'est le cas en particulier pour $\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}$, et ainsi, $u(\mathrm{BAB}^{-1}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{U}(\lambda_k)\mathrm{BQ}_k^{\mathrm{A}}(\mathrm{A})\mathrm{B}^{-1} = \mathrm{B}u(\mathrm{A})\mathrm{B}^{-1}$.

22. *a)* On l'a vu à la question précédente, $u(\mathrm{D}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{U}(\lambda_k)\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}(\mathrm{D})$. Or D est diagonale donc $\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}(\mathrm{D})$ aussi et par suite $u(\mathrm{D})$ est diagonale, avec $[u(\mathrm{D})]_{i,i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{U}(\lambda_k)\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}([\mathrm{D}]_{i,i})$.
En outre, $[\mathrm{D}]_{i,j}$ est une valeur propre de A donc il existe $j \in [\![1,\ell]\!]$ tel que $[\mathrm{D}]_{i,i} = \lambda_j$. Ainsi, $\mathrm{Q}_k^{\mathrm{A}}([\mathrm{D}]_{i,i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc $[u(\mathrm{D})]_{i,i} = \mathrm{U}(\lambda_j) = \mathrm{U}([\mathrm{D}]_{i,i})$.

b) On en déduit que $u(\mathrm{A}) = \mathrm{S}u(\mathrm{D})\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{S}\,\mathrm{diag}\big(\mathrm{U}(\alpha_1), \dots, \mathrm{U}(\alpha_n)\big)\mathrm{S}^{-1}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les valeurs propres de A, présentes avec leurs multiplicités respectives.

Partie IV Application à des cas particuliers

23. *a)* On a $\mathrm{H}^{n-1} \neq 0$ et $\mathrm{H}^n = 0$ donc $\varphi_{\mathrm{H}} = \mathrm{X}^n$.

b) Sachant que $\mathrm{H} = \mathrm{A} - \alpha \mathrm{I}_n$ on en déduit que $\varphi_{\mathrm{A}} = (\mathrm{X} - \alpha)^n$. Le polynôme $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{U}^{(k)}(\alpha)}{k!}(\mathrm{X} - \alpha)^k$ vérifie : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathrm{P}^{(k)}(\alpha) = \mathrm{U}^k(\alpha)$ donc d'après la question 14, $u(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathrm{U}^{(k)}(\alpha)}{k!}\mathrm{H}^k$.

Sachant que $\mathrm{H}^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que $u(\mathrm{A})$ est égale à la matrice indiquée dans l'énoncé.

24. *a)* On a $\mathrm{rg}(\mathrm{G}) \leqslant \min(\mathrm{rg}(\mathrm{Y}), \mathrm{rg}(\mathrm{Z})) = 1$ donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{G} = 0$ ou $\mathrm{rg}\,\mathrm{G} = 1$. Mais Y et Z sont non nuls donc il existe i et j tels que $[\mathrm{Y}]_i \neq 0$ et $[\mathrm{Z}]_j \neq 0$ et alors $[\mathrm{G}]_{ij} = [\mathrm{Y}]_i[\mathrm{Z}]_j \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{rg}\,\mathrm{G} = 1$.
Pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{GX} = \mathrm{YZ}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{X})\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} \in \mathbb{C}$ donc $\mathrm{Im}\,\mathrm{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Y})$, et sachant que $\mathrm{rg}\,\mathrm{G} = 1$, $\mathrm{Im}\,\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Y})$.

b) $\mathrm{rg}\,\mathrm{G} = 1$ donc 0 est valeur propre d'ordre $n-1$. De plus, $\mathrm{tr}\,\mathrm{G} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Y}]_i[\mathrm{Z}]_j = \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ donc la dernière valeur propre de G est $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$ (cette valeur pouvant éventuellement être nulle).

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}| \leqslant \sqrt{\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Z}}\sqrt{\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}} = 1$. Or $\mathrm{R}_u > 1$ donc $\mathrm{G} \in \mathbb{M}_n(u)$.

d) Lorsque $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} \neq 0$ la matrice G est diagonalisable (deux sous-espaces propres, l'un de dimension $n-1$, l'autre de dimension 1) donc $\varphi_{\mathrm{G}} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y})$.

e) D'après les résultats de la partie III, $u(\mathrm{G}) = \mathrm{U}(0)\dfrac{\mathrm{G} - (\mathrm{Z}^{\mathrm{T}})\mathrm{YI}_n}{0 - \mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}} + \mathrm{U}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y})\dfrac{\mathrm{G} - 0\mathrm{I}_n}{\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} - 0} = \mathrm{U}(0)\mathrm{I}_n + \dfrac{\mathrm{U}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}) - \mathrm{U}(0)}{\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}}\mathrm{G}$.

f) Lorsque $\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{G}^2 = \mathrm{Y}(\mathrm{Z}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y})\mathrm{Z}^{\mathrm{T}} = 0$ et puisque $\mathrm{G} \neq 0$, $\varphi_{\mathrm{G}} = \mathrm{X}^2$.
Le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{U}(0) + \mathrm{U}'(0)\mathrm{X}$ vérifie $\mathrm{P}(0) = \mathrm{U}(0)$ et $\mathrm{P}'(0) = \mathrm{U}'(0)$ donc d'après la question 14, $u(\mathrm{G}) = \mathrm{P}(\mathrm{G}) = \mathrm{U}(0)\mathrm{I}_n + \mathrm{U}'(0)\mathrm{G}$.

25. *a)* Pour tout $j,k \in [\![1,n]\!]$, $[\mathrm{F}\overline{\mathrm{F}}]_{j,k} = \sum_{\ell=1}^{n} [\mathrm{F}]_{j\ell}[\overline{\mathrm{F}}]_{\ell k} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \omega^{(j-1)(\ell-1)}\overline{\omega}^{(\ell-1)(k-1)} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}(\omega^{j-k})^{\ell-1}$.

Si $j=k$ on a $\omega^{j-k}=1$ donc $[\mathrm{F}\overline{\mathrm{F}}]_{j,j}=1$; si $j \neq k$, ω^{j-k} est une racine de l'unité différente de 1 donc $[\mathrm{F}\overline{\mathrm{F}}]_{j,k}=0$.
Ainsi, $\mathrm{F}\overline{\mathrm{F}} = \mathrm{I}_n$, et F est inversible, d'inverse $\overline{\mathrm{F}}$.

b) Pour tout $j,k \in [\![1,n]\!]$, $[\mathrm{F}^2]_{j,k} = \sum_{\ell=1}^{n} [\mathrm{F}]_{j\ell}[\mathrm{F}]_{\ell k} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \omega^{(j-1)(\ell-1)}\omega^{(\ell-1)(k-1)} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n-1}(\omega^{j+k-2})^{\ell-1}$.

Comme précédemment, ω^{j+k-2} est une racine de l'unité, donc $[\mathrm{F}^2]_{j,k}$ est égal à 0 ou à 1, et ainsi, $\mathrm{F}^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) On en déduit que $(\mathrm{F}^{-1})^2 = \overline{\mathrm{F}}^2 = \overline{\mathrm{F}^2} = \mathrm{F}^2$, et donc que $\mathrm{F}^4 = \mathrm{I}_n$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(\mathrm{F}) \subset \{-1,1,i,-i\}$: les valeurs propres sont toutes de module 1, et $\mathrm{F} \in \mathbb{M}_n(u)$.

d) Le polynôme X^4-1 est scindé à racines simples donc F est diagonalisable, et φ_{F} divise $\mathrm{X}^4-1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}-i)(\mathrm{X}+i)$. Considérons le polynôme

$$\mathrm{P} = \frac{1}{4}\Big(\mathrm{U}(1)(\mathrm{X}+1) - \mathrm{U}(-1)(\mathrm{X}-1)\Big)(\mathrm{X}^2+1) + \frac{i}{4}\Big(\mathrm{U}(i)(\mathrm{X}+i) - \mathrm{U}(-i)(\mathrm{X}-i)\Big)(\mathrm{X}^2-1)$$

Il vérifie : $\mathrm{P}(1)=\mathrm{U}(1)$, $\mathrm{P}(-1)=\mathrm{U}(-1)$, $\mathrm{P}(i)=\mathrm{U}(i)$ et $\mathrm{P}(-i)=\mathrm{U}(-i)$ donc vérifie les conditions de la question 14 (que $1,-1,i,-i$ soient valeurs propres ou pas ne change rien à l'affaire). On en déduit que $u(\mathrm{F}) = \mathrm{P}(\mathrm{F})$.

26. *a)* Si $\mathrm{X} \sim \mathscr{B}(\mathrm{N},p)$ alors $u_k = 0$ pour $k > \mathrm{N}$ et ainsi, $\mathrm{R}_u = +\infty$. U est un polynôme donc les conditions de la question 14 sont bien évidemment vérifiées, et $u(\mathrm{A}) = \mathrm{U}(\mathrm{A})$.

On calcule $\mathrm{U}(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \binom{\mathrm{N}}{k} p^k(1-p)^{\mathrm{N}-k}x^k = \big(px+(1-p)\big)^{\mathrm{N}}$ donc $u(\mathrm{A}) = \big(p\mathrm{A}+(1-p)\mathrm{I}_n\big)^{\mathrm{N}}$.

b) Nous avons ici $u_0 = 0$ et $u_k = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \geqslant 1$. $\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1-p$ donc $\mathrm{R}_u = \frac{1}{1-p} > 1$.

On calcule ensuite $\mathrm{U}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}x^k = \frac{px}{1-(1-p)x}$.

Si A est diagonalisable, on peut appliquer les résultats de la partie III : si $\mathrm{A} = \mathrm{SDS}^{-1}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ alors $u(\mathrm{A}) = \mathrm{S}u(\mathrm{D})\mathrm{S}^{-1}$ avec $u(\mathrm{D}) = \mathrm{diag}(\mathrm{U}(\lambda_1),\dots,\mathrm{U}(\lambda_n))$.
Compte tenu de l'expression de U, on a $\big(\mathrm{I}_n-(1-p)\mathrm{D}\big)u(\mathrm{D}) = p\mathrm{D}$ et donc $(\mathrm{I}_n-(1-p)\mathrm{A}\big)u(\mathrm{A}) = p\mathrm{A}$.

Puisque $\mathrm{A} \in \mathbb{M}_n(u)$, $\frac{1}{1-p} = \mathrm{R}_u$ n'est pas valeur propre de A donc $\mathrm{I}_n-(1-p)\mathrm{A}$ est inversible, ce qui conduit à

$$u(\mathrm{A}) = p\Big(\mathrm{I}_n-(1-p)\mathrm{A}\Big)^{-1}\mathrm{A}$$