Chaîne de Markov en temps continu (Mines PC 2023)

Durée : 4 heures

Dans tout le sujet on fixe un entier naturel $\mathrm{N} \geqslant 2$.

- Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$ on note $\mathrm{A}[i,j]$ le coefficient à la ligne i et à la colonne j de A. Par abus, si A est une matrice colonne ($q=1$), on note $\mathrm{A}[i]$ pour $\mathrm{A}[i,1]$. De même, si A est une matrice ligne ($p=1$), on note $\mathrm{A}[i]$ pour $\mathrm{A}[1,i]$.
- On identifie $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ avec $\mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, on note $\mathrm{E}_k \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le k^{e} qui vaut 1. On rappelle que $(\mathrm{E}_1,\dots,\mathrm{E}_{\mathrm{N}})$ est une base de $\mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$.
- On note $\mathrm{U} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On a donc, pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\mathrm{U}[i]=1$.
- On appelle *noyau de Markov* une matrice $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ telle que
  (M_1) $\forall (i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2,\ \mathrm{K}[i,j] \geqslant 0\,;$
  (M_2) $\forall i \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]=1.$
- On appelle *probabilité* un vecteur ligne $\mu \in \mathcal{M}_{1,\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ tel que
  (P_1) $\forall i \in [\![1,\mathrm{N}]\!],\ \mu[i] \geqslant 0\,;$
  (P_2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mu[j]=1.$
- On notera I_{N} la matrice identité de $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$.

Préliminaires

1 ▷ Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$. Montrer que A vérifie (M_2) si et seulement si $\mathrm{AU}=\mathrm{U}$.
En déduire que si A et B sont deux noyaux de Markov, alors AB est encore un noyau de Markov.

On considère un noyau de Markov K.

2 ▷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, K^n est un noyau de Markov.

3 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$. Justifier que la série $\displaystyle\sum \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ converge.

On notera H_t la matrice de $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2,\ \mathrm{H}_t[i,j]=\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$$

4 ▷ Montrer que pour tout réel $t \in \mathbb{R}_+$, H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Montrer que pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathrm{H}_{t+s}=\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s$. *On pourra faire apparaître un produit de Cauchy.*

1 – Modélisation probabiliste

On cherche à modéliser un système ayant N états numérotés de 1 à N. À l'instant initial, le système est dans l'état 1. Le système est soumis à des impulsions.
On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, à chaque impulsion, si le système est dans l'état i, il se retrouve dans l'état j avec une probabilité $p_{i,j}$ qui ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion.
Ce système est modélisé par un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on note Z_k la variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,\mathrm{N}]\!]$ qui correspond à l'état du système après k impulsions. Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$ et tout entier naturel k tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_k=i) \neq 0$, on a donc $\mathrm{P}\big(\mathrm{Z}_{k+1}=j \,\big|\, \mathrm{Z}_k=i\big)=p_{i,j}$. En particulier, cette probabilité ne dépend pas de k. De plus, la variable Z_0 est la variable certaine de valeur 1.

On considère la matrice K de $\mathcal{M}_{\mathrm{N}}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2,\ \mathrm{K}[i,j]=p_{i,j}$$

6 ▷ Justifier que K est un noyau de Markov.

7 ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, N]\!]$. Montrer que $\mathbb{P}(Z_n = j) = K^n[1, j]$. *On pourra raisonner par récurrence.*

8 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On suppose que le nombre d'impulsions après un temps t est donné par une variable aléatoire Y_t suivant la loi de Poisson de paramètre t. Pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on note $A_{t,j}$ l'événement « le système est dans l'état j après un temps t ». Justifier que $\mathbb{P}(A_{t,j}) = H_t[1, j]$.

2 – Étude d'un endomorphisme autoadjoint

Soit E un espace euclidien de dimension N. On note $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme autoadjoint de E. On note $q_u : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in E,\ q_u(x) = \langle u(x) \mid x \rangle$$

et on suppose que pour tout $x \in E$, $q_u(x) \geqslant 0$.

9 ▷ Énoncer le théorème spectral pour l'endomorphisme u. Que peut-on dire des valeurs propres de u ?

On suppose que 0 est valeur propre simple de u et on note λ_2 la plus petite valeur propre non nulle de u. On note aussi $p : E \to E$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(u)$.

10 ▷ Montrer que pour tout $x \in E$, $q_u\big(x - p(x)\big) \geqslant \lambda_2 \|x - p(x)\|^2$.

3 – Convergence de $H_t[i, j]$

On considère un noyau de Markov K. On suppose que 1 est une valeur propre simple de K.

On suppose qu'il existe une probabilité $\pi \in \mathcal{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ telle que

(a) $\forall j \in [\![1, N]\!]$, $\pi[j] \neq 0$;
(b) $\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2$, $\pi[i]K[i, j] = K[j, i]\pi[j]$; on dit que K est π-*réversible*.

Un rapide calcul montre alors que pour tout réel positif t, H_t est aussi un noyau de Markov π-réversible, c'est-à-dire

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \quad \pi[i]H_t[i, j] = H_t[j, i]\pi[j]$$

On ne demande donc pas de démontrer ce résultat.

Pour finir, si X et Y sont dans $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle X \mid Y \rangle = \sum_{i=1}^{N} X[i]Y[i]\pi[i]$$

Dans cette dernière partie, on cherche à déterminer, si $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$, la limite de $H_t[i, j]$ quand t tend vers $+\infty$ et à majorer la vitesse de convergence.

11 ▷ Montrer que $\pi K = \pi$.

12 ▷ Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X \mid Y \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

Dans la suite on note E l'espace euclidien $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ muni de ce produit scalaire.

13 ▷ On considère l'endomorphisme u de E défini par $u(X) = (I_N - K)X$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(U)$ et que u est un endomorphisme autoadjoint de E.

On admet que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'endomorphisme $X \mapsto H_tX$ est aussi un endomorphisme autoadjoint de E.

14 ▷ Montrer que pour tout $X \in E$,

$$q_u(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \big(X[i] - X[j]\big)^2 K[i, j]\pi[i]$$

Que dire des valeurs propres de u ?

Soit $X \in E$. On note ψ_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans E par $\psi_X(t) = H_tX$. On note aussi φ_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $\varphi_X(t) = \|H_tX\|^2$.

Les questions 15 et 16 pourront être admises par les 3/2.

15 ▷ Justifier que ψ_X est dérivable et que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$\psi_X'(t) = -(I_N - K)H_t X$$

16 ▷ En déduire que φ_X est dérivable et que $\varphi_X'(t) = -2q_u(H_t X)$.

On note $p : E \to E$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(u)$.

17 ▷ Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $p(H_t X) = p(X)$.

18 ▷ On pose $Y = X - p(X)$. On note λ la plus petite valeur propre non nulle de u.
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_Y'(t) \leqslant -2\lambda\varphi_Y(t)$ et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\|H_t X - p(X)\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$.

19 ▷ Soit $i \in [\![1, N]\!]$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\|H_t E_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$H_t[i, j] - \pi[j] = \sum_{k=1}^{N}\Big(H_{t/2}[i, k] - \pi[k]\Big)\Big(H_{t/2}[k, j] - \pi[j]\Big).$$

On pourra utiliser la question 5.

21 ▷ En déduire que pour tout $(i, j) \in [\![1, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\Big|H_t[i, j] - \pi[j]\Big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\frac{\pi[j]}{\pi[i]}}$$

Déterminer enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i, j]$.