Corrigé : chaîne de Markov en temps continu (Mines PC 2023)

Préliminaires

1 ▷ Pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $(\mathrm{AU})[i] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,j]$ donc A vérifie (M_2) si et seulement si pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $(\mathrm{AU})[i] = 1 = \mathrm{U}[i]$, soit encore si et seulement si AU = U.

Soient A et B deux noyaux de Markov. Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $(\mathrm{AB})[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}[i,k]\mathrm{B}[k,j] \geqslant 0$ donc AB vérifie (M_1).

En outre, ABU = AU = U donc AB vérifie (M_2). La matrice AB est bien un noyau de Markov.

2 ▷ Montrons par récurrence sur n que K^n est un noyau de Markov :

- si $n = 0$, $\mathrm{K}^0 = \mathrm{I}_\mathrm{N}$ est bien un noyau de Markov ;
- si $n \geqslant 1$, supposons que K^{n-1} soit un noyau de Markov. D'après la question précédente il en est de même de $\mathrm{K}^n = \mathrm{K}^{n-1} \times \mathrm{K}$ donc la récurrence se propage.

3 ▷ Les conditions (M_1) et (M_2) imposent que pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $0 \leqslant \mathrm{K}[i,j] \leqslant 1$, et puisque K^n est aussi un noyau de Markov, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \mathrm{K}^n[i,j] \leqslant 1$. Ainsi, $\dfrac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{|t|^n}{n!}\Big)$ et puisque la série $\sum \dfrac{|t|^n}{n!}$ converge (c'est le développement en série entière de $\mathrm{e}^{|t|}$), la série $\sum \dfrac{t^n\mathrm{K}^n[i,j]}{n!}$ converge.

4 ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant \mathrm{K}^n[i,j] \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \mathrm{H}_t[i,j] \leqslant 1$; la condition (M_1) est satisfaite.

De plus, pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,j] = 1$ donc $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,j] = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n!}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[i,j] = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t^n}{n!} = 1$ (somme finie de séries convergentes). La condition (M_2) est satisfaite, la matrice H_t est un noyau de Markov.

5 ▷ Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]^2$, $(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{H}_t[i,k]\mathrm{H}_s[k,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{-(t+s)}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{t^p\mathrm{K}^p[i,k]}{p!}\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}\dfrac{s^q\mathrm{K}^q[k,j]}{q!}\Big)$.

Les deux séries convergent absolument pour tout $s,t \in \mathbb{R}$ donc on peut en réaliser le produit de Cauchy :

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n}\frac{\mathrm{K}^p[i,k]\mathrm{K}^{n-p}[k,j]t^ps^{n-p}}{p!(n-p)!}\Big)$$

S'agissant d'une somme finie de séries convergentes, on peut écrire :

$$(\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s)[i,j] = \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n}\frac{t^ps^{n-p}}{p!(n-p)!}\underbrace{\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{K}^p[i,k]\mathrm{K}^{n-p}[k,j]}_{(\mathrm{K}^p\times\mathrm{K}^{n-p})[i,j]}\Big) = \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}t^ps^{n-p}\Big)\mathrm{K}^n[i,j]$$

$$= \mathrm{e}^{-(t+s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(t+s)^n}{n!}\mathrm{K}^n[i,j] = \mathrm{H}_{t+s}[i,j]$$

donc $\mathrm{H}_t\mathrm{H}_s = \mathrm{H}_{t+s}$.

1 – Modélisation probabiliste

6 ▷ Pour tout $(i,j) \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $p_{ij} \geqslant 0$ donc la condition (M_1) est bien vérifiée.

$\big[\mathrm{Z}_2 = j\big]_{j\in[\![1,\mathrm{N}]\!]}$ est un système complet d'événements donc pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\big(\mathrm{Z}_2 = j \mid \mathrm{Z}_1 = i\big) = 1$, soit $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} p_{ij} = 1$. la condition (M_2) est vérifiée, K est bien un noyau de Markov.

7 ▷ Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $j \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = j) = \mathrm{K}^n[1,j]$:

- c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_0 = j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathrm{I}_\mathrm{N}[1,j]$;
- si $n \geqslant 0$, supposons le résultat acquis au rang n.
  D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathbb{P}\big(\mathrm{Z}_{n+1} = j \mid \mathrm{Z}_n = i\big)\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} p_{ij}\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i)$.
  On a $p_{ij} = \mathrm{K}[i,j]$ et par hypothèse de récurrence, $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = i) = \mathrm{K}^n[1,i]$ donc
  $\mathbb{P}(\mathrm{Z}_{n+1} = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}^n[1,i]\mathrm{K}[i,j] = (\mathrm{K}^n \times \mathrm{K})[1,j] = \mathrm{K}^{n+1}[1,j]$; la récurrence se propage.

8 ▷ $\big[\mathrm{Y}_t = n\big]_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\mathrm{A}_{t,j} \cap [\mathrm{Y}_t = n]\big)$$

Or $\mathrm{A}_{t,j} \cap [\mathrm{Y}_t = n] = [\mathrm{Z}_n = j] \cap [\mathrm{Y}_t = n]$ et il a été supposé que l'état du système ne dépend que de l'état où il était avant l'impulsion et non pas du nombre d'impulsions donc ces deux événements sont indépendants. Il en résulte que

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_{t,j}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n = j)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_t = n) = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n \mathrm{K}^n[1,j]}{n!} = \mathrm{H}_t(1,j)$$

2 – Étude d'un endomorphisme auto-adjoint

9 ▷ u est autoadjoint donc d'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée (e) formée de vecteurs propres de u.
Posons $u(e_k) = \lambda_k e_k$. On a $q_u(e_k) = \langle u(e_k) \mid e_k\rangle = \lambda_k \|e_k\|^2$ donc $\lambda_k \geqslant 0$. On a prouvé que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

10 ▷ Avec les mêmes notations, et sans perte de généralité, supposons $\lambda_1 = 0$, et posons $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. On a alors $p(x) = x_1 e_1$ donc $q_u\big(x - p(x)\big) = \Big\langle \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k e_k \,\Big|\, \sum_{k=2}^{n} x_k e_k \Big\rangle = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x_k^2 \geqslant \lambda_2 \sum_{k=2}^{n} x_k^2 = \lambda_2 \big\|x - p(x)\big\|^2$.

3 – Convergence de $\mathrm{H}_t[i,j]$

11 ▷ Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(\pi\mathrm{K})[i] = \displaystyle\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \pi[j]\mathrm{K}[j,i] = \Big(\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]\Big)\pi[i] = \pi[i]$ d'après la propriété (M_2) donc $\pi\mathrm{K} = \pi$.

12 ▷ Bilinéarité et symétrie sont ici des propriétés évidentes.
Pour tout $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$, $\langle \mathrm{X} \mid \mathrm{X}\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[i]^2\pi[i] \geqslant 0$ car $\pi[i] \geqslant 0$ (π est une probabilité), avec égalité si et seulement si pour tout $i \in [\![1,\mathrm{N}]\!]$, $\mathrm{X}[i]^2\pi[i] = 0$, soit $\mathrm{X}[i] = 0$ car $\pi[i] > 0$. L'application $(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \mapsto \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle$ est définie positive, il s'agit bien d'un produit scalaire.

13 ▷ D'après la question 1, $\mathrm{KU} = \mathrm{U}$ et par hypothèse 1 est valeur propre simple de K donc $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{K} - \mathrm{I}) = 1$. Ceci montre que $\mathrm{Ker}(\mathrm{K} - \mathrm{I}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$. Or $u(\mathrm{X}) = 0 \iff \mathrm{KX} = \mathrm{X}$ donc $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{U})$.
Pour tout $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathcal{M}_{\mathrm{N},1}(\mathbb{R})$, $\langle u(x) \mid \mathrm{Y}\rangle = \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{Y}\rangle - \langle \mathrm{KX} \mid \mathrm{Y}\rangle$. On a

$$\langle \mathrm{KX} \mid \mathrm{Y}\rangle = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{KX})[\mathrm{I}]\mathrm{Y}[i]\pi[i] = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[i,j]\mathrm{X}[j]\mathrm{Y}[i]\pi[i]$$

K estπ-réversible, donc $\langle \mathrm{KX} \mid \mathrm{Y}\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j,i]\mathrm{X}[j]\mathrm{Y}[i]\pi[j]$ et donc :

$$\langle \mathrm{KX} \mid \mathrm{Y}\rangle = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j]\Big(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}[j,i]\mathrm{Y}[i]\Big)\pi[j] = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{X}[j](\mathrm{KY})[j]\pi[j] = \langle \mathrm{X} \mid \mathrm{KY}\rangle$$

On en déduit que $\langle u(x) \mid Y\rangle = \langle X \mid Y\rangle - \langle XY \mid KY\rangle = \langle X \mid u(Y)\rangle$; u est autoadjoint.

14 ▷ $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i]-X[j])^2K[i,j]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i] + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i] - 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i].$

Or : • $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]^2K[i,j]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}X[i]^2\Big(\sum_{j=1}^{N}K[i,j]\Big)\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}X[i]^2\pi[i] = \|X\|^2$

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[j]^2K[i,j]\pi[i] = \sum_{j=1}^{N}X[j]^2\sum_{i=1}^{N}K[j,i]\pi[j]$ (car K est π-réversible) $\displaystyle = \sum_{j=1}^{N}X[j]^2\pi[j] = \|X\|^2$

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}X[i]X[j]K[i,j]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}X[i]\Big(\sum_{j=1}^{N}X[j]K[i,j]\Big)\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}X[i](KX)[i]\pi[i] = \langle X \mid KX\rangle$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(X[i]-X[j])^2K[i,j]\pi[i] = 2\|X\|^2 - \langle X \mid KX\rangle = 2q_u(X).$

On en déduit que pour tout $X \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, $q_u(X) \geqslant 0$, et donc que $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$ (question 9).

15 ▷ Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle (H_tX)[i] = \sum_{j=1}^{N}H_t[i,j]X[j] = e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]X[j]}{n!}.$

Une série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence (ici égal à $\mathbb{R}$) donc $t \mapsto (H_tX)[i]$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, ce qui prouve que ψ_X est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En outre,

$$\frac{d}{dt}(H_tX)[i] = -e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[i,j]X[j]}{n!} + e^{-t}\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]X[j]}{n!}$$

On a $\displaystyle (KH_t)[i,j] = \sum_{k=1}^{N}K[i,k]e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^n[k,j]}{n!} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=1}^{N}K[i,k]K^n[k,j] = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nK^{n+1}[i,j]}{n!}$ donc

$$\frac{d}{dt}(H_tX)[i] = -(H_tX)[i] + (KH_tX)[i] \qquad \text{et} \qquad \psi_X'(t) = -H_tX + KH_tX = -(I_n - K)H_tX$$

16 ▷ On a $\varphi_X(t) = \langle \psi_X(t) \mid \psi_X(t)\rangle$ donc φ_X est dérivable (composée d'une fonction dérivable et d'une forme bilinéaire) et $\varphi_X'(t) = 2\langle \psi_X(t) \mid \psi_X'(t)\rangle = -2\langle H_tX \mid (I_n - K)H_tX\rangle = -2q_u(H_tX)$.

17 ▷ On a $\mathrm{Ker}\,u = \mathrm{Vect}(U)$ et $\displaystyle\|U\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\pi[i] = 1$ (π est une probabilité) donc $p(X) = \langle U \mid X\rangle U$.

Or $\displaystyle\langle U \mid H_tX\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}H_t[i,j]X[j]\pi[i] = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}H_t[j,i]X[j]\pi[j]$ (car H_t est π-réversible) $\displaystyle = \sum_{j=1}^{N}X[j]\pi[j] = \langle U \mid X\rangle$ donc $p(H_tX) = p(X)$.

18 ▷ On a $Y = X - p(X) = X - \langle U \mid X\rangle U$ donc $H_tY = H_tX - p(X)$ (puisque $H_tU = U$) et donc $H_tY = H_tX - p(H_tX)$.
D'après la question 10, $q_u(H_tY) \geqslant \lambda\|H_tY\|^2$, et d'après la question 16, $\varphi_Y'(t) \leqslant -2\lambda\varphi_Y(t)$.
On a donc pour tout $t \geqslant 0$, $\big(\varphi_Y'(t) + 2\lambda\varphi_Y(t)\big)e^{2\lambda t} \leqslant 0$, soit encore $\dfrac{d}{dt}\Big(\varphi_Y(t)e^{2\lambda t}\Big) \leqslant 0$. Ceci montre que la fonction $t \mapsto \varphi_Y(t)e^{2\lambda t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $\varphi_Y(t)e^{2\lambda t} \leqslant \varphi_Y(0) = \|Y\|^2$, soit encore $\varphi_Y(t) \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$.
Or on a vu que $\varphi_Y(t) = \|H_tY\|^2 = \|H_tX - p(X)\|^2$, donc $\|H_tX - p(X)\|^2 \leqslant e^{-2\lambda t}\|X - p(X)\|^2$.

19 ▷ On a $p(E_i) = \langle U \mid E_i\rangle U = \pi[i]U$ et $\|E_i - p(E_i)\|^2 = \|E_i\|^2 - 2\langle E_i \mid p(E_i)\rangle + \|p(E_i\|^2$.
On a $\|E_i\|^2 = \pi[i]$, $\|p(E_i)\|^2 = \pi[i]^2\|U\|^2 = \pi[i]^2$ car π est une probabilité. Enfin, $\langle E_i \mid p(E_i)\rangle = \pi[i]\langle E_i \mid U\rangle = \pi[i]^2$ donc $\|E_i - p(E_i)\|^2 = \pi[i] - \pi[i]^2 \leqslant \pi[i]$.
En appliquant la question précédente à E_i on obtient alors $\|H_tE_i - \pi[i]U\| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]}$.

20 ▷ D'après la question 5, $H_t = H_{t/2} \times H_{t/2}$ donc $H_t[i,j] = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]H_{t/2}[k,j]$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{N}\big(H_{t/2}[i,k]-\pi[k]\big)\big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\big) = H_t[i,j] - \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]\pi[j] - \sum_{k=1}^{N}\pi[k]H_{t/2}[k,j] + \pi[j]$$

D'après la propriété (M_2), $\sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[i,k]\pi[j] = \pi[j]$ et par π-réversibilité, $\sum_{k=1}^{N}\pi[k]H_{t/2}[k,j] = \sum_{k=1}^{N} H_{t/2}[j,k]\pi[j] = \pi[j]$ donc en définitive, $\sum_{k=1}^{N}\big(H_{t/2}[i,k]-\pi[k]\big)\big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\big) = H_t[i,j]-\pi[j]$.

21 ▷ Par π-réversibilité on a $\big(H_{t/2}[k,i]-\pi[k]\big)\pi[i] = \big((H_{t/2}[i,k]-\pi[i]\big)\pi[k]$ donc :

$$\pi[i]\big(H_t[i,j]-\pi[j]\big) = \sum_{k=1}^{N}\big(H_{t/2}[k,i]-\pi[i]\big)\big(H_{t/2}[k,j]-\pi[j]\big)\pi[k]$$

Par ailleurs, $\big(H_t E_i - \pi[i]U\big)[k] = H_t[k,i]-\pi[i]$ donc $\pi[i]\big(H_t[i,j]-\pi[j]\big) = \big\langle H_{t/2}E_i - \pi[i]U \,\big|\, H_{t/2}E_j - \pi[j]U\big\rangle$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\pi[i]\big|H_t[i,j]-\pi[j]\big| \leqslant \|H_{t/2}E_i - \pi[i]U\| \times \|H_{t/2}E_j - \pi[j]U\|$ et d'après la question 19, $\pi[i]\big|H_t[i,j]-\pi[j]\big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\pi[i]\pi[j]}$, soit $\big|H_t[i,j]-\pi[j]\big| \leqslant e^{-\lambda t}\sqrt{\dfrac{\pi[j]}{\pi[i]}}$.
On en déduit bien évidemment que $\lim\limits_{t\to+\infty} H_t[i,j] = \pi[j]$.