

SOMMES DE PROJECTEURS (MINES PC 2014)

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et u un endomorphisme non nul de E . On appelle *homothétie* un multiple scalaire de l'identité, et *projecteur* un endomorphisme p de E idempotent, c'est-à-dire tel que $p \circ p = p$.

Partie I. Traces et projecteurs

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace* de A le réel $\text{tr} A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$.

Question 1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Question 2. Montrer que la trace de la matrice $A = \text{Mat}_{(b)}(u)$ associée à u est indépendante de la base (b) .

On appelle *trace* de u , notée $\text{tr}(u)$, la valeur commune des traces des matrices représentant u . On dit que la trace est un *invariant de similitude*.

Question 3. Soit p un projecteur de E . Démontrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Question 4. En déduire que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$.

Question 5. On pose $q = \text{Id} - p$. Montrer que $\text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$ et que $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$.

Question 6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.

Question 7. Montrer que si l'endomorphisme s est une somme finie de projecteurs p_i , $i = 1, \dots, m$, alors $\text{tr}(s) \in \mathbb{N}$ et $\text{tr}(s) \geq \text{rg}(s)$.

Partie II. Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.

Question 8. Démontrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ u \circ p = \mu p$.

Question 9. Soit $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$. Montrer que dans la base (e) la matrice qui représente u s'écrit

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ \times & \boxed{\text{B}} & & \\ \vdots & & & \\ \times & & & \end{pmatrix} \quad (1)$$

où μ est le nombre réel dont l'existence découle de la question 8, et $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Question 10. Montrer que si $q \circ u \circ q$ n'est pas proportionnel à q , alors B , défini en (1), n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $q = \text{Id} - p$.

Partie III. Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que l'endomorphisme u n'est pas une homothétie.

Question 11. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que x et $u(x)$ ne soient pas colinéaires.

Question 12. Montrer qu'il existe une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \dots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & \boxed{A} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}). \quad (2)$$

Question 13. En déduire que si $\text{tr } u = 0$, il existe une base (e') dans laquelle la diagonale de $\text{Mat}_{(e')}(u)$ est nulle.

Dans la suite de cette partie on considère une suite t_1, \dots, t_n de n nombres réels vérifiant $\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n t_k$.

Question 14. En dimension $n = 2$, démontrer qu'il existe une base (e) dans laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u)$ ait pour éléments diagonaux t_1 et t_2 .

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On admettra qu'en dimension $n \geq 3$ il existe un projecteur p de E de rang 1, tel que d'une part $p \circ u \circ p = \mu p$ et d'autre part $q \circ u \circ q$ ne soit pas proportionnel à $q = \text{Id} - p$.

Question 15. En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9 et 10 démontrer qu'il existe une base (e) dans laquelle la matrice représentant u s'écrit

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \dots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \boxed{B} & \\ \times & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } B \text{ n'est pas une homothétie.} \quad (3)$$

Question 16. En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base (e') dans laquelle $\text{Mat}_{(e')}(u)$ ait pour éléments diagonaux les $t_k, k = 1, \dots, n$.

Partie IV. Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que u est un endomorphisme de E vérifiant $\text{tr}(u) \in \mathbb{N}$ et $\text{tr}(u) \geq \text{rg}(u)$. On pose $\rho = \text{rg}(u)$ et $\theta = \text{tr}(u)$.

Question 17. Montrer qu'il existe une base (e) dans laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u)$ est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{O} \\ \boxed{A_2} & \boxed{O} \end{pmatrix} \quad \text{où } A_1 \text{ est une matrice de taille } \rho \times \rho. \quad (4)$$

Supposons tout d'abord que A_1 ne soit pas la matrice d'une homothétie.

Question 18. À l'aide de la question 16 montrer qu'il existe une base (e') dans laquelle

$$\text{Mat}_{(e')}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A'_1} & \boxed{O} \\ \boxed{A'_2} & \boxed{O} \end{pmatrix} \quad (5)$$

où A'_1 est une matrice de taille $\rho \times \rho$ dont les éléments diagonaux t_1, \dots, t_ρ sont des entiers non nuls.

Question 19. En déduire que u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que A_1 est la matrice d'une homothétie.

Question 20. Démontrer que là encore, u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.