Corrigé : sommes de projecteurs (Mines PC 2014)

Partie I. Traces et projecteurs

Question 1. Posons $\mathrm{A} = (a_{ij})$ et $\mathrm{B} = (b_{ij})$; le coefficient d'indice (i, i) de AB vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$ donc $\mathrm{tr(AB)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$.
De même, le coefficient d'indice (j, j) de BA vaut $\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$ donc $\mathrm{tr(BA)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$.
Ces deux sommes sont identiques (seul l'ordre de sommation diffère) donc $\mathrm{tr(AB)} = \mathrm{tr(BA)}$.

Question 2. Considérons deux bases (b) et (b'), notons $\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{(b)}(b')$ la matrice de passage de (b) vers (b'), et posons $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(b)}(u)$ et $\mathrm{A}' = \mathrm{Mat}_{(b')}(u)$. Alors $\mathrm{A}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}') = \mathrm{tr}(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{AP})) = \mathrm{tr}((\mathrm{AP})\mathrm{P}^{-1}) = \mathrm{tr(A)}$. La trace de la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{(b)}(u)$ est bien indépendante du choix de la base (b).

Question 3. Considérons un vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors $p(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(y)$. On en déduit que $p \circ p(y) = 0_{\mathrm{E}}$. Mais $p \circ p(y) = p(y) = x$ car p est un projecteur, donc $x = 0_{\mathrm{E}}$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathrm{E}}\}$. La somme $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ est directe et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = n$ donc $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathrm{E}$.

Question 4. Dans une base (e) adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ on a

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{I}_r} & \boxed{\mathrm{O}} \\ \boxed{\mathrm{O}} & \boxed{\mathrm{O}} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } r = \dim(\mathrm{Im}(p))$$

puisque pour tout vecteur $x = u(y)$ dans $\mathrm{Im}(p)$, $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$. On a donc $r = \mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.

Question 5. Pour tout $x = u(y) \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = p \circ p(y) = p(y) = x$ donc $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(q)$.
Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p)$ alors $(\mathrm{Id} - p)(x) = 0_{\mathrm{E}}$, et $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. On a donc $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Im}(p)$ et en définitive $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q)$.
Puisque q est aussi un projecteur (on a $(\mathrm{Id}-p)\circ(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Id} - 2p + p \circ p = \mathrm{Id} - p$) on a donc aussi $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - q) = \mathrm{Ker}(p)$.

Question 6. D'après la formule de Grassmann, $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G} - \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \leqslant \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{G}$.

Question 7. La trace est un opérateur linéaire, donc $\mathrm{tr}(s) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(p_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(p_i) \in \mathbb{N}$.
Montrons maintenant par récurrence sur m que $\mathrm{rg}(s) \leqslant \mathrm{tr}(s)$.

- Si $m = 1$ il suffit d'appliquer la question 4.
- Si $m > 1$, supposons le résultat acquis au rang $m - 1$: si $s' = \sum_{i=1}^{m-1} p_i$ alors $\mathrm{rg}(s') \leqslant \mathrm{tr}(s')$.

  On a $s = s' + p_m$ donc $\mathrm{rg}(s) = \dim(\mathrm{Im}(s' + p_m))$. Mais $\mathrm{Im}(s' + p_m) \subset \mathrm{Im}(s') + \mathrm{Im}(p_m)$ donc $\mathrm{rg}(s) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(s') + \mathrm{Im}(p_m))$.

  On applique la question 6 : $\mathrm{rg}(s) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(s')) + \dim(\mathrm{Im}(p_m)) = \mathrm{rg}(s') + \mathrm{rg}(p_m) \leqslant \mathrm{tr}(s') + \mathrm{tr}(p_m) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}(p_i) = \mathrm{tr}(s)$.
  Le résultat est établi au rang m ; la récurrence se propage.

Partie II. Projecteurs de rang 1

Question 8. Soit a un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(p)$; il en constitue une base puisque $\mathrm{rg}(p) = 1$.
Le vecteur $p(u(a))$ est élément de $\mathrm{Im}(p)$ donc il existe un réel μ tel que $p(u(a)) = \mu a$. Nous allons montrer que ce réel μ convient.
Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = \lambda a$. Alors $p \circ u \circ p(x) = p \circ u(\lambda a) = \lambda p(u(a)) = \lambda \mu a = \mu p(x)$.
Cette égalité étant vraie pour tout $x \in \mathrm{E}$, on en déduit que $p \circ u \circ p = \mu p$.

Question 9. Nous avons $e_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $e_1, \dots, e_n \in \mathrm{Ker}(p)$. Si on décompose $u(e_1)$ dans cette base : $u(e_1) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, il s'agit de montrer que $\lambda_1 = \mu$.

Pour ce faire, on calcule $p(u(e_1)) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k p(e_k) = \lambda_1 e_1$ puisque $p(e_1) = e_1$ et $p(e_k) = 0_\mathrm{E}$ pour $k \geqslant 2$.
Ainsi, $p \circ u \circ p(e_1) = p(u(e_1)) = \lambda_1 e_1$. Mais d'après la question 8 on a aussi $p \circ u \circ p(e_1) = \mu p(e_1) = \mu e_1$, ce qui permet d'en déduire que $\lambda_1 = \mu$.

Question 10. Supposons que B soit la matrice d'une homothétie de rapport λ ; alors $\mathrm{B} = \lambda \mathrm{I}_{n-1}$. Posons alors

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} \mu & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \times & \lambda & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \times & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{de sorte que } u(e_k) = \alpha_k e_1 + \lambda e_k.$$

$q(e_1) = 0_\mathrm{E}$ donc $q \circ u \circ q(e_1) = 0_\mathrm{E} = \lambda q(e_1)$.
Pour tout $k \geqslant 2$, $q(e_k) = e_k$ donc $q \circ u \circ q(e_k) = q(u(e_k)) = q(\alpha_k e_1 + \lambda e_k) = \lambda e_k = \lambda q(e_k)$.
Les endomorphisme $q \circ u \circ q$ et λq coïncident sur la base (e) ; ils sont égaux.
Par contraposée on en déduit que si $q \circ u \circ q$ n'est pas proportionnel à q alors B n'est pas la matrice d'une homothétie.

Partie III. Endomorphismes différents d'une homothétie

Question 11. Considérons une base $(b) = (b_1, \dots, b_n)$ de E et supposons que pour tout $x \in \mathrm{E}$ les vecteurs $u(x)$ et x soient colinéaires. En particulier, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que $u(b_k) = \lambda_k b_k$.
Pour $i \neq j$, considérons maintenant le vecteur $u(b_i + b_j) = \lambda_i b_i + \lambda_j b_j$. Par hypothèse il est colinéaire à $b_i + b_j$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(b_i + b_j) = \alpha(b_i + b_j)$. Par unicité de la décomposition dans une base on en déduit que $\lambda_i = \alpha = \lambda_j$.
Ainsi, tous les λ_i sont égaux, ce qui prouve que u est une homothétie.
Par contraposée on en déduit que si u n'est pas une homothétie il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre.

Question 12. D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter cette famille $(x, u(x))$ pour obtenir une base (e) dans laquelle $e_1 = x$ et $e_2 = u(x)$. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a la forme souhaitée.

Question 13. Supposons $\mathrm{tr}(u) = 0$ et raisonnons par récurrence sur la dimension n de E.

- Si $n = 1$ u est l'endomorphisme nul et le résultat est établi dans n'importe quelle base.
- Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis en dimension $n-1$.
  Commençons par appliquer la question 12, posons $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et notons $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ l'endomorphisme de F dont la matrice dans la base $(e_2, \dots, e_n)$ est la matrice A de l'équation (2).
  Si v est une homothétie de rapport λ, on a $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_{n-1}$ et $\mathrm{tr}(u) = (n-1)\lambda$ donc $\lambda = 0$ et la base (e) convient.
  Si v n'est pas une homothétie, on a $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}(u) = 0$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe une base (b) de F dans laquelle la diagonale de $\mathrm{Mat}_{(b)}(v)$ est nulle.
  Traduit matriciellement, ceci signifie qu'il existe une matrice inversible $\mathrm{Q} \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}$ est à diagonale nulle.
  En posant $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad \mathrm{Q} \quad} \\ 0 & \end{pmatrix}$ on a $\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ \cdots \ 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad \mathrm{Q}^{-1} \quad} \\ 0 & \end{pmatrix}$ donc P est la matrice de passage de la base (e) vers une base (e')
  pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e')}(u) = \mathrm{P}^{-1}\,\mathrm{Mat}_{(e)}(u)\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \times \ \cdots \ \times \\ \times & \\ \vdots & \boxed{\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ}} \\ \times & \end{pmatrix}$ est à diagonale nulle. La récurrence se propage.

Question 14. u n'est pas une homothétie donc $u - t_1\mathrm{Id}$ non plus : d'après la question 11 il existe un vecteur e_1 tel que e_1 et $(u - t_1\mathrm{Id})(e_1)$ ne soient pas colinéaires. Posons $e_2 = (u - t_1\mathrm{Id})(e_1)$. Alors (e_1, e_2) est une base de E, et puisque $u(e_1) = t_1 e_1 + e_2$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Par invariance de la trace on a $t_1 + b = \mathrm{tr}(u) = t_1 + t_2$ donc $b = t_2$, ce qui établit le résultat souhaité.

Question 15. Appliquons la propriété admise au réel $\mu = t_1$. D'après la question 9 il existe une base (e) dans laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a la forme requise dans l'équation (3), et d'après la question 10 la matrice B n'est pas la matrice d'une homothétie.

Question 16. Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 2$, le résultat a été établi à la question 14.
- Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. On commence par appliquer la question 15 puis on procède peu ou prou comme à la question 13 : on pose $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et on note $v \in \mathcal{L}(F)$ l'endomorphisme de F dont la matrice dans la base $(e_2, \dots, e_n)$ est B.

  On a $\mathrm{tr}(B) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} t_k$ donc par hypothèse de récurrence il existe une base (b) de F dans laquelle les éléments de la diagonale de $\mathrm{Mat}_{(b)}(v)$ sont les $t_2, \dots, t_n$, ce qui, traduit matriciellement, prouve l'existence d'une matrice inversible $Q \in \mathcal{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}BQ$ ait pour éléments diagonaux les $t_2, \dots, t_n$.

  En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{Q} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{Q^{-1}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{(e)}(u)P = \begin{pmatrix} t_1 & \times & \cdots & \times \\ \times & & & \\ \vdots & & \boxed{Q^{-1}BQ} & \\ \times & & & \end{pmatrix}$ est une matrice dont les éléments diagonaux sont les $t_1, \dots, t_n$.

  P est la matrice de passage de la base (e) vers une base (e') répondant aux exigences de l'énoncé, la récurrence se propage.

Partie IV. Décomposition en somme de projecteurs

Question 17. Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Alors $\dim(H) = \mathrm{rg}(u) = \rho$, et dans une base adaptée à la décomposition $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ a bien la forme souhaitée.

Question 18. A_1 n'est pas une homothétie, et $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(u) = \theta$. Puisque θ est un entier supérieur ou égal à ρ, il est possible de le décomposer comme somme de ρ entiers non nuls : $\theta = t_1 + \cdots + t_\rho$. D'après la question 16, A_1 est semblable à une matrice A_1' dont les éléments diagonaux sont les $t_1, \dots, t_\rho$.

Posons donc $A_1' = P^{-1}A_1P$, puis $Q = \begin{pmatrix} \boxed{P} & \boxed{O} \\ \boxed{O} & \boxed{I} \end{pmatrix}$. Alors $Q^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{P^{-1}} & \boxed{O} \\ \boxed{O} & \boxed{I} \end{pmatrix}$ et

$$Q^{-1}\,\mathrm{Mat}_{(e)}(u)Q = \begin{pmatrix} \boxed{P^{-1}A_1P} & \boxed{O} \\ \boxed{A_2P} & \boxed{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1'} & \boxed{O} \\ \boxed{A_2'} & \boxed{O} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A_2' = A_2P.$$

Question 19. Pour tout $i \in [\![1, \rho]\!]$, notons C_i la colonne de rang i de la matrice $\mathrm{Mat}_{(e')}(u)$, et considérons l'endomorphisme v_i dont la matrice dans la base (e') est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & C_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (toutes les colonnes sont nulles sauf la i^{e} égale à C_i).
Autrement dit, v_i est l'endomorphisme défini par les relations $v_i(e_j') = 0_E$ si $j \neq i$, et $v_i(e_i') = u(e_i')$.
On a alors $u = v_1 + \cdots + v_\rho$.
Par ailleurs, $v_i^2 = t_i v_i$. Ceci peut se constater matriciellement ou vectoriellement, en constatant que $v_i^2(e_j') = 0_E$ si $j \neq i$, et $v_i^2(e_i') = v_i(u(e_i')) = v_i(t_i e_i') + 0_E = t_i v(e_i')$.

De ceci il résulte que $p_i = \dfrac{1}{t_i} v_i$ est un projecteur, et $v_i = \underbrace{p_i + \cdots + p_i}_{t_i \text{ fois}}$ la somme de t_i projecteurs. $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{\rho} v_i$ apparaît alors comme la somme d'un nombre fini de projecteurs.

Question 20. Si A_1 est la matrice d'une homothétie alors $A_1 = \lambda I_\rho$, et $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(u) = \theta$ donc $\theta = \rho\lambda$. Puisque u est supposé non nul on a $\mathrm{tr}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u) > 0$ et donc $\lambda \geqslant 1$.
Considérons la projection vectorielle p sur $\mathrm{Vect}(e_1)$, parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{(e)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Mat}_{(e)}(u-p) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1'} & \boxed{O} \\ \boxed{A_2} & \boxed{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_1' = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Si $\rho \geqslant 2$, A_1' n'est plus une matrice d'homothétie.
Si $\lambda > 1$ on a $\mathrm{tr}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u) + 1$ donc $\mathrm{tr}(u-p) = \mathrm{tr}(u) - 1 \geqslant \mathrm{rg}(u) \geqslant \mathrm{rg}(u-p)$ donc on peut appliquer la question précédente à $u - p$: cet endomorphisme est somme d'un nombre fini de projecteurs, et il en est de même de u.

Enfin, si $\lambda = 1$ ou $\rho = 1$, on peut appliquer la démarche de la question précédente avec $t_i = \lambda \in \mathbb{N}$, ce qui permet de conclure.