ENDOMORPHISMES CYCLIQUES (ENTPE MP 1996)

Durée : 4 heures

Définitions et notations

n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $p \in \mathbb{N}$, on rappelle qu'on définit par récurrence l'endomorphisme f^p en posant :

$$f^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ f^{p+1} = f^p \circ f = f \circ f^p.$$

Si $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{p} a_k \mathrm{X}^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on définit l'endomorphisme $\mathrm{P}(f) = \sum_{k=0}^{p} a_k f^k$, et on note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme f :

$$\mathbb{K}[f] = \left\{ \mathrm{P}(f) \;\middle|\; \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \right\}$$

Enfin, on appelle commutant de f l'ensemble $\mathscr{C}(f) = \left\{ g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \;\middle|\; f \circ g = g \circ f \right\}$. *On admettra que $\mathscr{C}(f)$ est un espace vectoriel de dimension au moins égale à n sur* $\mathbb{K}$.

Partie I. Matrice compagne d'un endomorphisme cyclique

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit *cyclique* lorsqu'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ soit une base de E.

Question 1. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base (e) de E et des scalaires $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que f soit associée dans cette base à la matrice :

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On dira que C est la *matrice compagne* de f.

Question 2. On conserve les notations de la question précédente et on pose $\mathrm{Q} = \mathrm{X}^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$. Exprimer en fonction de Q le polynôme caractéristique χ_{C} de la matrice C. On dira aussi que C est la *matrice compagne* du polynôme χ_{C}.
Si f est un endomorphisme cyclique, a-t-on unicité de la matrice compagne de f ?

Question 3. Soit λ une valeur propre de C. Déterminer la dimension du sous-espace propre associé, puis une base de ce sous-espace propre. À quelle condition la matrice C est-elle diagonalisable ?

Partie II. Endomorphismes nilpotents

Question 4. On suppose dans cette question $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$.
Montrer que f est cyclique, et déterminer sa matrice compagne. Quelle est la dimension du noyau de f ?

Question 5. On suppose maintenant f nilpotent : il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.
On pose pour $k \in [\![0,p]\!]$, $\mathrm{N}_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $n_k = \dim \mathrm{N}_k$. *On suppose également que* $n_1 = 1$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, $\mathrm{N}_k \subset \mathrm{N}_{k+1}$ et $f(\mathrm{N}_{k+1}) \subset \mathrm{N}_k$.

b) En considérant l'application $\phi : \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{k+1} & \longrightarrow & \mathrm{N}_k \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$ montrer que pour tout $k \in [\![0,p-1]\!]$, $n_{k+1} \leqslant n_k + 1$.

c) Montrer que s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ que $n_k = n_{k+1}$, alors pour tout $j \geqslant k$, $\mathrm{N}_j = \mathrm{N}_k$.
En déduire que $p = n$ et déterminer n_k pour $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie III. Une caractérisation des endomorphismes cycliques

Question 6. Montrer que si f est cyclique, la famille $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Ce résultat sera également utilisé dans la quatrième partie.

On suppose, dans cette partie, que $(\mathrm{Id}_\mathrm{E}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.

Question 7. Dans cette question on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On factorise le polynôme caractéristique χ_f de f sous la forme : $\chi_f(\mathrm{X}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{p} (\mathrm{X} - \lambda_k)^{m_k}$ où les λ_k sont les p valeurs propres distinctes de f et les $m_k \in \mathbb{N}^*$ leur ordre respectif de multiplicité.
Pour $k \in [\![1,p]\!]$ on pose $\mathrm{E}_k = \mathrm{Ker}\Big((f - \lambda_k \mathrm{Id}_\mathrm{E})^{m_k}\Big)$ et *on admet que* $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_p$.

a) Montrer que les sous-espaces vectoriels E_k sont stables par f.

b) Pour $k \in [\![1,p]\!]$ on note $\phi_k : \begin{pmatrix} \mathrm{E}_k & \longrightarrow & \mathrm{E}_k \\ x & \longmapsto & f(x) - \lambda_k x \end{pmatrix}$.
Déterminer $\phi_k^{m_k}$. Quelle est la dimension de E_k ?
Montrer que $\phi_k^{m_k - 1}$ n'est pas l'endomorphisme nul.

c) À l'aide des résultats établis dans la partie II, en déduire l'existence d'une base (b) de E dans laquelle f est associée à une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

d) En utilisant la matrice compagne de χ_f montrer que f est cyclique.

Question 8. On suppose, dans cette question uniquement, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que l'on suppose semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\mathrm{A} = \mathrm{QBQ}^{-1}$ avec $\mathrm{Q} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
On écrit $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 + i\mathrm{Q}_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que l'ensemble $\Big\{\lambda \in \mathbb{R} \;\Big|\; \mathrm{Q}_1 + \lambda \mathrm{Q}_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\Big\}$ est non vide, et en déduire que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer alors, en utilisant la question 7, que f est cyclique.

Partie IV. Une autre caractérisation des endomorphismes cycliques

Question 9. Dans cette question, f désigne un endomorphisme cyclique, et on choisit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

a) Soit $g \in \mathscr{C}(f)$. En écrivant $g(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(x_0)$, montrer que $g \in \mathbb{K}[f]$.

b) Montrer que $g \in \mathscr{C}(f)$ si et seulement s'il existe un unique polynôme $\mathrm{R} \in \mathbb{K}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que $g = \mathrm{R}(f)$.

Question 10. Prouver que f est cyclique si et seulement si $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

Partie V. Cycles

Dans cette partie on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On dit qu'un endomorphisme f est un *p-cycle* lorsqu'il existe un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\right)$ soit une famille génératrice de E (mais pas nécessairement une base), et telle que $f^p(x_0) = x_0$.

Question 11. Dans cette question f désigne un p-cycle.

a) Montrer que $f^p = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

b) On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\right)$ soit libre.
Montrer que $\mathscr{E}$ est un ensemble non vide et majoré ; on note m son plus grand élément.

c) Montrer que pour tout entier $k \geqslant m$, $f^k(x_0) \in \mathrm{Vect}\left(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\right)$, et en déduire que f est cyclique.
Quel est le nombre de valeurs propres distinctes de f ?

Question 12. Dans cette question f désigne un n-cycle.

a) À quoi est égale sa matrice compagne C ?

b) Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{U}_k = \begin{pmatrix} \overline{\omega}^k \\ \overline{\omega}^{2k} \\ \vdots \\ \overline{\omega}^{nk} \end{pmatrix}$. Calculer CU_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Question 13. Soit $\mathrm{M} = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = \overline{\omega}^{ij}$, et $\overline{\mathrm{M}} = (\overline{m}_{ij})$ la matrice conjuguée de M. Calculer $\mathrm{M}\overline{\mathrm{M}}$, en déduire que M est une matrice inversible, et donner l'expression de M^{-1}.

Question 14. Étant donné $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{n-2} & & & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$
Montrer que A est diagonalisable. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.