Étude du reste d'une série numérique

Durée : 4 heures

Ce contrôle est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème 1. (d'après E3A MP 1999)

Ce sujet a pour objet l'étude de la convergence de deux séries dont les termes généraux sont les restes de deux séries alternées usuelles.

Partie I.

Dans cette partie, on s'intéresse au reste de la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k}$, ce qui nous amène à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Question 1. Rappeler l'énoncé d'un théorème permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k}$ est convergente. Quel encadrement de a_n ce théorème fournit-il ?

Question 2.

a) On considère deux entiers n et p tels que : $0 \leqslant n < p$. Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x + (-1)^p \int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$, et en déduire que $a_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Question 3.

a) À l'aide d'une intégration par parties, Déterminer un entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et un réel non nul k tels que :

$$a_n = k\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big).$$

b) En déduire la nature de la série de terme général a_n.

Question 4. À l'aide de l'expression obtenue à la question 2b, calculer la somme $\sum\limits_{n=0}^{p} a_n$, puis la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Partie II.

Dans cette partie, on s'intéresse au reste de la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, ce qui nous amène à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

Question 5. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite $v_n = u_n - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ est décroissante et minorée, et en déduire l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(u_n - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\Big) = \ell + 2$.

Question 6. Dans cette question on établit deux résultats intermédiaires utiles pour la suite du problème.

a) Soit θ un réel strictement supérieur à 1. Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\theta}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) On considère deux séries convergentes $\sum x_n$ et $\sum y_n$ à termes généraux positifs, vérifiant : $x_n \sim y_n$. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$ on a : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$.

Question 7. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2\sqrt{n} - \ell$.

a) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$, et en déduire que $v_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer un équivalent de $v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$, et en déduire que u_n vérifie une relation de la forme

$$u_n = \mathrm{A}\sqrt{n} + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

où A, B et C désignent des constantes réelles à déterminer.

Question 8. On pose $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

a) Exprimer b_{2n} en fonction de S et des sommes partielles u_n et u_{2n}.

b) En déduire qu'il existe deux réels α et β, que l'on déterminera, tels que : $b_{2n} = \alpha + \dfrac{\beta}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

c) Exprimer S en fonction de ℓ et déterminer la nature de la série de terme général b_n.

Problème 2. (d'après Centrale MP 2011)

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste.

Rappels et notations

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |v_n| \leqslant M|u_n|$$

À toutes fins utiles, on rappelle l'énoncé de l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a,b]$. Alors :

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leqslant M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Partie I. Étude préliminaire

Convergence des séries de Riemann

Question 9. Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a,+\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1,+\infty[$, on a $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$

Question 10. En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Question 11. Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Question 12. En utilisant l'encadrement de la question 9, montrer que $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Question 13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$.

Question 14. En déduire que :

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $\mathrm{R}_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Partie II. Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

On admettra que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, la convergence de cette série étant absolue.

On notera en particulier que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.

Nombres de Bernoulli

On définit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = 1$ et $a_n = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{(n+1-j)!}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Question 15. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, la fonction g définie par : $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie :

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} - f' \in \mathrm{Vect}\left(f^{(p+1)}, f^{(p+2)}, \ldots, f^{(2p-1)}\right)$$

Question 16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|a_n| \leqslant 1$. Déterminer a_1 et a_2.

Question 17. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\sum a_n z^n$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Question 18. En réalisant un produit de Cauchy, calculer pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ le produit $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z)$.
En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.
On fixe un entier naturel $p \geqslant 2$ et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{R}(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + \mathrm{R}(k)$.

Question 19. En appliquant à g l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre p, montrer que $|\mathrm{R}(k)| \underset{k\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^{p+\alpha}}\right)$.

Question 20. En déduire le développement asymptotique du reste :

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\left(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}(n)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{p+\alpha-1}}\right)$$

Question 21. Donner le développement asymptotique de $\mathrm{R}_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.