Corrigé : étude du reste d'une série numérique

Problème 1. (d'après E3A MP 1999)

Partie I.

Question 1. La suite $(1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0, donc d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ converge. De plus, la somme de la série est toujours comprise entre 0 et son premier terme donc, en appliquant ceci au reste on obtient $|a_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Question 2.

a) Calculons : $(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx + (-1)^p\int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{(-x)^p-(-x)^n}{1+x}\,dx = -\int_0^1 \Big(\sum_{k=n}^{p-1}(-x)^k\Big)dx$

$$= \sum_{k=n}^{p-1}(-1)^{k+1}\int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=n}^{p-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{p}\frac{(-1)^k}{k}.$$

b) On a : $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$ donc $\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^p}{1+x}\,dx = 0$. En passant à la limite suivant p dans l'égalité de la question précédente, on obtient $a_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

Question 3.

a) En procédant à une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_n &= \left[\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\right]_0^1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $0 \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}\,dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ donc $\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,dx = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

En définitive, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

b) Posons $\alpha_n = a_n + \frac{(-1)^n}{2n}$. D'après ce qui précède, $\alpha_n = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ donc la série $\sum \alpha_n$ est absolument convergente. Par ailleurs, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge car elle vérifie le critère spécial des séries alternées. La somme de deux séries convergentes étant convergente, on en déduit que la série $\sum\Big(\alpha_n + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\Big)$, c'est à dire $\sum a_n$, converge.

Question 4. Utilisons pour calculer la somme de la série $\sum a_n$ l'expression obtenue à la question 2b :

$$\sum_{n=0}^{p} a_n = \sum_{n=0}^{p}(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = -\int_0^1\Big(\sum_{n=0}^{p}(-x)^n\Big)\frac{dx}{1+x} = -\int_0^1 \frac{1+(-1)^p x^{p+1}}{(1+x)^2}\,dx.$$

Sachant que $0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{(1+x)^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{p+1}\,dx = \frac{1}{p+2}$ on obtient en faisant tendre p vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}.$$

Partie II.

Question 5. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Alors $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ étant décroissante, nous avons : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$. La première inégalité prouve que la suite (v_n) est décroissante. Par ailleurs, on obtient en faisant la somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \iff \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant 1.$$

La suite (v_n) est donc minorée par 0 ; elle converge. On pose $\ell = \lim_{+\infty} v_n - 2$.

Question 6.

a) Par comparaison à une intégrale on obtient :

$$\frac{1}{\theta-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\theta-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\theta-1}}\right) = \int_{n+1}^{p+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\theta} \leqslant \int_n^p \frac{\mathrm{d}x}{x^\theta} = \frac{1}{\theta-1}\left(\frac{1}{n^{\theta-1}} - \frac{1}{p^{\theta-1}}\right)$$

et en faisant tendre p vers $+\infty$: $\frac{1}{\theta-1} \times \frac{1}{(n+1)^{\theta-1}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\theta} \leqslant \frac{1}{\theta-1} \times \frac{1}{n^{\theta-1}}$. Ainsi, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\theta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\theta-1} \times \frac{1}{n^{\theta-1}}$.

b) Traduisons la propriété : $x_n \sim y_n$: pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $(1-\epsilon)x_k \leqslant y_k \leqslant (1+\epsilon)x_k$, et sommons cet encadrement pour $k \geqslant n+1$. On obtient : $(1-\epsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k \leqslant (1+\epsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$, ce qui traduit l'équivalence des restes.

Question 7.

a)
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{-1}{4n\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \sim \frac{-1}{4n\sqrt{n}}$. La série $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est à terme général positif et convergente (série de Riemann), ce qui nous autorise à appliquer la question 6b : la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge et les restes de ces deux séries sont équivalents :

$$-v_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) \sim -\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

On applique ensuite la question 6a : $v_{n+1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, soit encore, puisque $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, $v_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) Si on pousse plus loin le développement asymptotique de $v_{n+1} - v_n$ on obtient : $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{4n\sqrt{n}} + \frac{1}{4n^2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)$.

En posant $w_n = v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}}$ on obtient : $w_{n+1} - w_n \sim \frac{1}{16n^2\sqrt{n}}$. La série $\sum \frac{1}{16n^2\sqrt{n}}$ est à terme général positif et convergente (série de Riemann) ; on en déduit que la série $\sum (w_{n+1} - w_n)$ converge et que les restes sont équivalents :

$$-w_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (w_{k+1} - w_k) \sim \frac{1}{16}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}} \quad \text{soit} \quad w_n \sim \frac{-1}{24n\sqrt{n}}.$$

Nous avons donc $v_n = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ ce qui donne $u_n = 2\sqrt{n} + \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

Question 8.

a) Nous avons $b_{2n} = \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n}$, où $\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Or $\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$ et $u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k-1}}$ donc $\mathrm{S}_{2n} + u_{2n} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{2}u_n$.

Ainsi, $b_{2n} = \mathrm{S} + u_{2n} - \sqrt{2}u_n$.

b) À l'aide du développement limité obtenu à la question 7b on peut écrire :

$$b_{2n} = \mathrm{S} + 2\sqrt{2n} + \ell + \frac{1}{2\sqrt{2n}} - \sqrt{2}\Big(2\sqrt{n} + \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = \mathrm{S} + (1-\sqrt{2})\ell - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

c) Sachant que (b_n) tend vers 0 (c'est le reste d'une série convergente) nous avons nécessairement $\mathrm{S} + (1-\sqrt{2})\ell = 0$, c'est à dire : $\mathrm{S} = (\sqrt{2}-1)\ell$.

Il en résulte que $b_{2n} = \frac{-1}{2\sqrt{2n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$. Par ailleurs,

$$b_{2n+1} = b_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big)}_{\mathrm{O}(1/n\sqrt{n})} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

Nous avons donc prouvé que $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$. La série $\sum\Big(b_n - \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}\Big)$ est absolument convergente car dominée par une série de Riemann ; la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées ; il en résulte que la série $\sum b_n$ est convergente.

Problème 2. (d'après Centrale MP 2011)

Partie I. Étude préliminaire

Convergence des séries de Riemann

Question 9. f est décroissante donc pour tout $x \in [k, k+1]$, $f(x) \leqslant f(k)$ et par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x = f(k)$. De même, pour tout $x \in [k-1, k]$, $f(k) \leqslant f(x)$ donc $f(k) = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Question 10. Lorsque $\alpha \leqslant 0$ la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement (le terme général ne tend pas vers 0).
Lorsque $0 < \alpha \leqslant 1$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ décroit donc on peut appliquer la question précédente, et la relation de Chasles fournit la minoration : $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$.
On calcule $\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln n & \text{si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$ donc dans les deux cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = +\infty$, ce qui prouve par minoration que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} = +\infty$: la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Lorsque $\alpha > 1$ on utilise cette fois la majoration $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.
Les sommes partielles de la série à terme général positif $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ sont majorées donc la série converge.

Question 11. La question précédente a déjà montré que $\mathrm{S}(\alpha) \leqslant 1 + \dfrac{1}{\alpha-1}$, et en minorant par le premier terme de la somme on a aussi $1 \leqslant \mathrm{S}(\alpha)$.

Première étude asymptotique du reste

Question 12. Étant donnés deux entiers $2 \leqslant n < \mathrm{N}$ on obtient en sommant les inégalités de la question 9 pour $k \in [\![n, \mathrm{N}-1]\!]$: $\displaystyle\int_n^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{k=n}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, ce qui donne en calculant les intégrales :

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^{\alpha-1}}\right)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient l'encadrement $\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$.
Par ailleurs on a $\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha} = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1 + \dfrac{1-\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \dfrac{1-\alpha}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right) = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ donc $\mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Question 13. On calcule $f'(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $f''(x) = \dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ et $f^{(3)}(x) = \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{x^{\alpha+2}}$. Sur l'intervalle $[k, k+1]$ on a $\left|f^{(3)}(x)\right| \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{k^{\alpha+2}}$ donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre k et $k+1$ on obtient $\left|f(k+1) - f(k) - f'(k) - \dfrac{1}{2!}f''(k)\right| \leqslant \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{3!k^{\alpha+2}}$, ce qui conduit à : $f(k+1) - f(k) = \dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha}{k^{\alpha+1}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$.

Question 14. On a $\dfrac{1}{k^\alpha} = f(k+1) - f(k) + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}} + u_k$ avec $u_k = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2}}\Big)$.

$\lim\limits_{+\infty} f(k) = 0$ donc par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\big(f(k+1)-f(k)\big) = -f(n) = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$. Par ailleurs, les deux séries $\sum \dfrac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\sum u_k$ convergent (absolument pour la seconde) donc $\mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \dfrac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) + \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

D'après la question 12, $\mathrm{R}_n(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{1}{n^\alpha} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$.

Par ailleurs, il existe une constante M telle que $|u_k| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{k^{\alpha+2}}$ donc $\Big|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\Big| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\mathrm{M}}{k^{\alpha+2}} = \mathrm{M}\mathrm{R}_n(\alpha+2) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$ (question 12) donc tout ceci nous donne : $\mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^\alpha} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$.

Partie II. Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

Nombres de Bernoulli

Question 15. Posons $g = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} a_j f^{(j)}$; on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}g^{(k)} - f' = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{a_j}{k!}f^{(k+j)} - f'$. Cette expression est combinaison linéaire des fonctions $f', f'', \dots, f^{(2p-1)}$ et il s'agit de montrer que tous les coefficients devant $f', f'', \dots, f^{(p)}$ sont nuls.

Le coefficient devant f' est égal à $a_0 - 1 = 0$.

Pour tout $n \in [\![1, p-1]\!]$, le coefficient devant $f^{(n+1)}$ est égal à $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n+1-j)!} = a_n + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_j}{(n+1-j)!} = 0$.

On a donc bien $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k!}g^{(k)} - f' \in \mathrm{Vect}\big(f^{(p+1)}, \dots, f^{(2p-1)}\big)$.

Question 16. La relation de récurrence s'écrit aussi : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{a_j}{(n+1-j)!} = 0$ donc :

- pour $n = 1$ on a $\dfrac{a_0}{2} + a_1 = 0$ donc $a_1 = -\dfrac{1}{2}$;
- pour $n = 2$ on a $\dfrac{a_0}{6} + \dfrac{a_1}{2} + a_2 = 0$ donc $a_2 = \dfrac{1}{12}$.

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leqslant 1$:

- c'est vrai pour $n = 0$;
- si $n > 1$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$. Alors :

$$|a_n| = \Big|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{a_j}{(n+1-j)!}\Big| \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\frac{|a_j|}{(n+1-j)!} \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(n+1-j)!} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \mathrm{e} - 2 < 1$$

  et la récurrence se propage.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a donc $|a_n z^n| \leqslant |z|^n$. Lorsque $|z| < 1$ la série géométrique $\sum |z|^n$ converge donc la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Question 18. Les convergences de séries $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum a_n z^n$ étant absolues on peut réaliser un produit de Cauchy, et en écrivant $\mathrm{e}^z - 1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!} = z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!} = z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$ on obtient : $(\mathrm{e}^z - 1)\varphi(z) = z\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n+1-k)!}\Big)z^n = z$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ et $z \neq 0$ on a donc $\varphi(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

Formule de Taylor

Question 19. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre k et $k+1$,

$$\left|g(k+1)-g(k)-\sum_{n=1}^{p}\frac{g^{(n)}(k)}{n!}\right|\leqslant\frac{\mathrm{M}_k}{(p+1)!}\quad \text{où } \mathrm{M}_k \text{ est un majorant de } g^{(p+1)} \text{ sur le segment } [k+k+1]$$

D'après la question 15, il existe des réels $b_{p+1},\dots,b_{2p-1}$ tels que $\displaystyle\sum_{n=1}^{p}\frac{g^{(n)}}{n!}=f'+\sum_{n=p+1}^{2p-1}b_nf^{(n)}$. On a donc

$$|\mathrm{R}(k)|=\left|g(k+1)-g(k)-f'(k)\right|\leqslant\sum_{n=p+1}^{2p-1}|b_n|.\left|f^{(n)}(k)\right|+\frac{\mathrm{M}_k}{(p+1)!}$$

On établit par récurrence que pour tout $n\geqslant 1$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{x^{\alpha+n-1}}\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{x^{\alpha+n-1}}\Big)$
donc $\displaystyle\sum_{n=p+1}^{2p-1}|b_n|.\left|f^{(n)}(k)\right|\underset{k\to+\infty}{=}\mathrm{O}\Big(\frac{1}{k^{\alpha+p}}\Big)$.
Par ailleurs, $\displaystyle g^{(p+1)}(x)=\sum_{n=0}^{p-1}a_nf^{(p+1+n)}(x)=\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^{p+n}a_n\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p+n)}{x^{\alpha+p+n}}$ donc on peut poser

$$\mathrm{M}_k=\sum_{n=0}^{p-1}\frac{|a_n|\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+p+n)}{k^{\alpha+p+n}}\underset{k\to+\infty}{=}\mathrm{O}\Big(\frac{1}{k^{\alpha+p}}\Big)$$

On a alors montré que $|\mathrm{R}(k)|\underset{k\to+\infty}{=}\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{k^{\alpha+p}}\Big)$.

Question 20. On a $\mathrm{R}(k)=g(k+1)-g(k)-\dfrac{1}{k^\alpha}$ donc $\displaystyle\mathrm{R}_n(\alpha)=\sum_{k=n}^{+\infty}\Big(g(k+1)-g(k)-\mathrm{R}(k)\Big)$.

Puisque $\lim\limits_{+\infty}g(x)=0$ on obtient par télescopage : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\Big(g(k+1)-g(k)\Big)=-g(n)$. Ainsi, $\displaystyle\left|\mathrm{R}_n(\alpha)+g(n)\right|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\mathrm{R}(k)\right|\leqslant\sum_{k=n}^{+\infty}\left|\mathrm{R}(k)\right|$.

D'après la question précédente, il existe une constante A telle que $\left|\mathrm{R}(k)\right|\leqslant\dfrac{\mathrm{A}}{k^{\alpha+p}}$ donc $\displaystyle\left|\mathrm{R}_n(\alpha)+g(n)\right|\leqslant\mathrm{A}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha+p}}=\mathrm{A}\mathrm{R}_n(\alpha+p)$.

Or d'après la question 12, $\mathrm{R}_n(\alpha+p)=\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+p-1}}\Big)$ donc on a montré que $\mathrm{R}_n(\alpha)=-g(n)+\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+p-1}}\Big)$.

Question 21. Pour $p=3$ cette formule s'écrit $\mathrm{R}_n(\alpha)=\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\dfrac{1}{2n^\alpha}+\dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}}+\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^{\alpha+2}}\Big)$ ce qui donne en particulier
$\mathrm{R}_n(3)=\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{2n^3}+\dfrac{1}{4n^4}+\mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n^5}\Big)$.