Contrôle de mathématique

Durée : 4 heures

Ce contrôle est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème 1. Produit de Hadamard (X PC 2020 – extrait)

Notations

Dans tout le problème, pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ on notera $[\![a,b]\!] = \left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; a \leqslant i \leqslant b \right\}$ l'ensemble des entiers compris entre a et b.
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $p \times q$ (p lignes et q colonnes). Lorsque $p = q$, on notera $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p \times p$.

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, A^{T} désignera la transposée de A. Un vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ pourra être identifié à un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et u^{T} sera le vecteur ligne associé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ on note $\mathrm{A} \odot \mathrm{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ par :

$$(\mathrm{A} \odot \mathrm{B})_{ij} = \mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}_{ij}$$

où pour tout matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, M_{ij} désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{A}^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $\mathrm{A}^{(0)}_{ij} = 1$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant q$ puis par récurrence, $\mathrm{A}^{(n+1)} = \mathrm{A}^{(n)} \odot \mathrm{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Enfin, on dira qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$ et $u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^p$. L'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sera noté $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie I.

Question 1. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{Sym}^+(p)$ et tous réels positifs a et b on a $a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 2. Montrer que si $v \in \mathbb{R}^p$ alors la matrice $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ définie par $\mathrm{A} = vv^{\mathrm{T}}$ est dans $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 3.

a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^p$, on a $(uu^{\mathrm{T}}) \odot (vv^{\mathrm{T}}) = (u \odot v)(u \odot v)^{\mathrm{T}}$.

b) Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés. Montrer que $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et que $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$.

c) En déduire que si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ alors $\mathrm{A} \odot \mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie II.

Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $f[\mathrm{A}] \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $f[\mathrm{A}]_{ij} = f(\mathrm{A}_{ij})$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

Question 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $\mathrm{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ où $a_k \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ un polynôme à coefficients positifs.

a) Vérifier que $\mathrm{P}[\mathrm{A}] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)}$ pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$ alors $\mathrm{P}[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

On pose, pour tout $n \geqslant 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ où $k!$ désigne la factorielle de k.

On admettra que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^x$.

Question 5. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

a) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}_n[\mathrm{A}]_{ij} = \exp(\mathrm{A}_{ij})$$

b) Montrer que $\exp[\mathrm{A}] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}}) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 6. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère un p-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et la matrice

$$\mathrm{A} = \big(\langle x_i \mid x_j\rangle\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

où $\langle a \mid b\rangle$ désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^d$. On notera $|a| = \sqrt{\langle a \mid a\rangle}$ la norme de a.

a) Montrer que $\mathrm{A} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

b) On note $u \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de coordonnées $\left(\exp\left(-\frac{|x_1|^2}{2}\right), \dots, \exp\left(-\frac{|x_p|^2}{2}\right)\right)$.

Montrer que $(\exp[\mathrm{A}] \odot (uu^{\mathrm{T}}))_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

c) Soient $\lambda > 0$ et $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathrm{K}_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

Montrer que $\mathrm{K} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Problème 2. Développement en fraction continue (d'après Centrale TSI 2010)

Rappels et notations

On rappelle qu'un nombre réel x est dit *rationnel* lorsqu'il existe deux entiers relatifs p et q (avec q non nul) tel que $x = \frac{p}{q}$. Un nombre réel qui n'est par rationnel est dit *irrationnel*.

Pour tout nombre réel x, on appelle *partie entière* de x et on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. On a donc : $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Si a et b désignent deux entiers naturels, b étant supposé non nul, on note $a \bmod b$ le reste de la division euclidienne de a par b.

Partie I. Étude d'une suite définie par récurrence

Question 7. On considère quatre réels a, b, c, d tel que c ne soit pas nul, ainsi que la fonction $g : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Dans la suite du problème, une telle fonction sera dite *homographique*.

a) À quelle condition cette fonction est-elle constante ?

On suppose dans la suite de cette question que cette condition n'est pas remplie.

b) Déterminer des nombres réels u, v et w tel que pour tout x différent de $-\frac{d}{c}$, $g(x) = u + \frac{v}{x+w}$.

c) En déduire le sens de variation de g sur chacun de ses intervalles de définition.

Question 8. On considère désormais la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$.

a) Quel est son ensemble de définition ? Montrer que f est périodique de période 1.

b) On considère un certain entier relatif k. Déterminer des réels a, b, c, d tels que la restriction f à $]k, k+1[$ coïncide sur cet intervalle avec la fonction homographique g définie à la question précédente.

c) Étudier la fonction f ; on précisera en particulier ses variations, son ensemble image et on tracera son graphe dans un repère orthonormé.

d) Démontrer que lorsque x est irrationnel, il en est de même de $f(x)$, puis que lorsque x est rationnel et non entier, $f(x)$ est un nombre rationnel.

On considère désormais un nombre réel x_0 strictement positif, et on s'intéresse lorsque cela est possible à la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n)$.

Question 9. Montrer que lorsque x_0 est irrationnel, le réel x_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 10. On suppose dans cette question que x_0 est un nombre rationnel et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel x_n est bien défini. Il existe donc deux entiers u_0 et v_0 tels que $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ et $v_0 > 0$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est un nombre rationnel, et que pour $n \geqslant 1$ on a $x_n > 1$.

b) On définit par récurrence deux suites d'entiers $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \begin{cases} u_n \bmod v_n & \text{lorsque } v_n \text{ est non nul} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

c) Prouver que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. L'hypothèse émise à la question 10 est-elle possible ? Que peut-on en conclure ?

Question 11. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur x_0 pour que x_n soit bien défini pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Partie II. Développement en fraction continue

Dans cette partie, on suppose que x_0 est un nombre réel irrationnel strictement positif, et on considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la relation : $x_{n+1} = f(x_n)$ (la fonction f étant définie à la question 8).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \lfloor x_n \rfloor$; la suite des entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée le *développement en fraction continue* du réel x_0.

Question 12. On suppose définie en Python une fonction `floor` qui prend pour argument un nombre flottant x et renvoie $\lfloor x \rfloor$. Rédiger en Python une fonction `dfc(x0, n)` prenant en arguments le réel x_0 et l'entier n, et renvoyant la liste des entiers $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$.

Question 13. Prouver que pour tout $n \geqslant 1$, l'entier a_n est supérieur ou égal à 1.

Question 14.

a) Dans cette question uniquement, on pose $x_0 = \sqrt{2}$ (on admet qu'il s'agit bien d'un nombre irrationnel).
Calculer x_0, x_1, x_2, puis démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Quel est le développement en fraction continue du réel $\sqrt{2}$?

b) De même, déterminer le développement en fraction continue du réel $\sqrt{3}$.

Dans la suite de cette partie, on considère deux entiers a et d strictement positifs, et on pose $b = 1 + ad$, et $c = 1$, ce qui définit une fonction homographique g tout comme à la question 7.

Question 15.

a) Démontrer que le nombre réel $y_0 = g(x_0)$ est bien défini et qu'il est irrationnel.

b) On note respectivement $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les développements en fraction continue de x_0 et y_0.
Démontrer que pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, $a_{n-1} = b_n$.

Question 16.

a) Montrer que le réel $\Delta = (a+d)^2 + 4$ n'est pas le carré d'un entier. On en déduit et on admettra que $\sqrt{\Delta}$ est un nombre irrationnel.

b) Démontrer que l'équation du second degré : $x^2 + (d-a)x - ad - 1 = 0$ possède deux solutions réelles distinctes toutes les deux irrationnelles, dont l'une, notée z_0, est strictement positive.

c) Démontrer que $z_0 = g(z_0)$. Que peut-on en déduire quant au développement en fraction continue du nombre z_0 ?

Question 17. Que peut-on dire du développement en fraction continue de $\sqrt{p^2+1}$ lorsque $p \in \mathbb{N}^*$?

Partie III. Convergence du développement en fraction continue

On garde les mêmes hypothèses que dans la partie II, et on définit deux suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ et :

$$\forall n \geqslant 2, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Question 18.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \geqslant 1$, puis que la suite $(q_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. Quelle est la limite de cette suite ?

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

c) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}}$ (on pourra commencer par prouver que $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n+1}}$).

Question 19. On définit maintenant une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$.

b) Prouver alors que les deux suites $(r_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(r_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, et en déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Question 20.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction homographique $g : x \longmapsto \dfrac{p_{n+1}x + p_n}{q_{n+1}x + q_n}$. Déterminer en fonction de n le sens de variation de cette fonction (utiliser la question 7c).

b) En remarquant que $x_0 = g(x_{n+2})$ et $r_{n+2} = g(a_{n+2})$, prouver pour tout $p \in \mathbb{N}$, $r_{2p} < x_0 < r_{2p+1}$; quelle est donc la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$?